1935 № 6—7

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР
Непременный секретарь академик *Н. П. Горбунов*

Ответственный редактор А. А. Борисяк. Редактор издания И. М. Эйзен.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathematiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ JENSEN'а. I

И. И. ПРИВАЛОВА

(*Представлено академиком* **Н. Н. Лузиным**)

1. Обобщение формулы Jensen'а. Рассмотрим функцию $u(z)$, субгармоническую в круге $|z|<R$ (в частности $R=+\infty$), и представим ее по формуле F. Riesz'a[1]:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\varphi)}d\theta-\iint\limits_{r<\rho}\ln\left|\frac{\rho^2-z\zeta}{\rho(z-\zeta)}\right|d\mu(\zeta),\quad (1)$$

где $z=re^{i\varphi}$, $r<\rho$, и интегрирование распространено по области круга $|\zeta|\leqslant\rho$ радиуса $\rho<R$, причем интеграл понимается в смысле Стильтьеса, обозначая через $\mu(\zeta)$ аддитивную положительную функцию множества, принадлежащего кругу $|\zeta|\leqslant\rho$ [($d\mu(\zeta)$ обозначает массу элемента площади с центром в точке ζ, порожденную субгармонической функцией $u(z)$]. Мы имеем право воспользоваться общей формулой F. Riesz'a, потому что в круге $|z|<\rho$ наша функция $u(z)$ имеет наилучшую гармоническую мажоранту, выражаемую первым членом правой части соотношения (1). Предполагая сначала $u(0)$ конечным числом, положим в соотношении (1) переменное $z=0$; тогда получим

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta-\iint\ln\frac{\rho}{|\zeta|}d\mu(\zeta).\quad (1')$$

Если $u(0)=-\infty$, то вспомогательное выражение $u(z)-\mu(0)\ln r$ представляет субгармоническую функцию в области $0<|z|<R$, стремящуюся к определенному конечному пределу c, когда r стремится к нулю. Следовательно это выражение изображает субгармоническую функцию во всем круге $|z|<R$, имеющую конечное значение в начале координат. Применяя соотношение (1') к этой функции, найдем:

$$c=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta-\mu(0)\ln\rho-\iint\limits_{0<|\zeta|\leqslant\rho}\ln\frac{\rho}{|\zeta|}d\mu.\quad (2)$$

В формуле (2) интегрирование в смысле Стильтьеса распространено на область $0<|\zeta|\leqslant\rho$.

[1] F. Riesz, Acta Mat., 1930.

Преобразуем двойной интеграл последней формулы. Для этого заметим, что

$$\iint\limits_{0<|\zeta|\leqslant\rho} \ln\frac{\rho}{|\zeta|}\,d\mu = \int\limits_0^\rho r\,dr\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{\rho}{r}\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)d\theta,$$

где $d\sigma$ — элемент площади.

Обозначим через $n(r, u)$ массу субгармонической функции $u(z)$, находящуюся в круге $|z|\leqslant r$; тогда имеем:

$$dr\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)r\,d\theta = dn(r, u)$$

и следовательно

$$\iint\limits_{0<|\zeta|\leqslant\rho} \ln\frac{\rho}{|\zeta|}\,d\mu = \int\limits_0^\rho \ln\frac{\rho}{r}\,d\left[n(r, u)-n(0, u)\right] = \int\limits_0^\rho \frac{n(r, u)-n(0, u)}{r}\,dr.$$

Последняя формула получена интегрированием по частям. Возвращаясь к формуле (2), перепишем ее так:

$$c=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta - \int\limits_0^\rho \frac{n(r, u)-n(0, u)}{r}\,dr - n(0, u)\ln\rho. \tag{3}$$

Положим здесь $u(z)=u^+(z)-u_+(z)$, где $u^+(z)=u(z)$, если $u(z)>0$ „u“ $=0$, если $u(z)\leqslant 0$, а $u_+(z)=0$, если $u(z)>0$ „u“ $=-u(z)$, если $u(z)\leqslant 0$; тогда получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta + \int\limits_0^\rho \frac{n(r, u)-n(0, u)}{r}\,dr + n(0, u)\ln\rho + c. \tag{I}$$

Введем сокращенные обозначения:

$$m^+(\rho, u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta,$$

$$m_+(\rho, u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta,$$

$$N(\rho, u)=\int\limits_0^\rho \frac{n(r, u)-n(0, u)}{r}\,dr + n(0, u)\ln\rho.$$

В этих обозначениях формула (I) примет вид:

$$m^+(\rho, u)=m_+(\rho, u)+N(\rho, u)+c. \tag{I'}$$

Левая часть $m^+(\rho, u)$ есть среднее значение положительных величин субгармонической функции $u(z)$ на окружности $|z| = \rho$; она тем больше, чем эти значения больше. Во второй части стоит сумма двух членов, из которых первый $m_+(\rho, u)$ есть среднее значение отрицательных величин, взятых со знаком $+$, субгармонической функции $u(z)$ на окружности $|z| = \rho$, а второй $N(\rho, u)$ зависит от массы нашей функции, находящейся в круге $|z| \leqslant \rho$. Этот второй член тем больше, чем больше масса, порождаемая нашей функцией. Оказывается, член $m^+(\rho, u)$, с точностью до придаточного постоянного, равен всегда сумме $m_+(\rho, u) + N(\rho, u)$.

Формула (I′) является частным случаем более общей и более симметричной формулы, которую мы установим, если рассмотрим функцию $U(z)$, представимую в виде разности двух субгармонических функций:

$$U(z) = u(z) - v(z).$$

В самом деле, из соотношения (3) найдем, заменяя $u(z)$ на $v(z)$:

$$c' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\rho e^{i\theta})\, d\theta - \int_0^{\rho} \frac{n(r, v) - n(0, v)}{r}\, dr - n(0, v)\ln\rho.$$

Вычитая последнее соотношение из (3), получим:

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta})\, d\theta - \int_0^{\rho} \frac{n(r,u) - n(0,u)}{r}\, dr +$$

$$+ \int_0^{\rho} \frac{n(r, v) - n(0, v)}{r}\, dr - n(0, u)\ln\rho + n(0, v)\ln\rho,$$

где $C = c - c'$.

Последнее же равенство в принятых обозначениях запишется так:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta + \int_0^{\rho} \frac{n(r, v) - n(0, v)}{r}\, dr + n(0, v)\ln\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_+(\rho e^{i\theta})\, d\theta + \int_0^{\rho} \frac{n(r, u) - n(0, u)}{r}\, dr + n(0, u)\ln\rho + C \tag{II}$$

или, пользуясь введенными выше сокращенными обозначениями, в виде:

$$m^+(\rho, U) + N(\rho, v) = m_+(\rho, U) + N(\rho, u) + C. \tag{II′}$$

Из последней формулы, как ее частный случай, вытекает известная формула Jensen'a-Nevanlinna, если примем $U(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — мероморфная функция, и заметим, что в этом случае $n(r, u)$ будет обозначать число нулей функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r$, а $n(r, v)$ — число ее полюсов в том же круге, считая каждый нуль и полюс столько раз, какова их кратность. Обозначим сумму $m^+(\rho, U) + N(\rho, v)$ через $T(\rho, U)$, т. е. положим:

$$T(\rho) = T(\rho, U) = m^+(\rho, U) + N(\rho, v)$$

и назовем $T(\rho)$ характеристической функцией для $U = u - v$. Она зависит одновременно от роста функции $U = u - v$ и распределения масс вычитаемой субгармонической функции v, а именно $T(\rho)$ есть сумма двух членов: первый есть среднее значение положительных величин функции $U(z)$ на окружности $|z| = \rho$; он тем больше, чем эти значения больше; второй зависит от массы вычитаемой субгармонической функции $v(z)$, находящейся в круге $|z| \leqslant \rho$; он тем больше, чем больше эта масса.

Формула (II′) показывает, что функция $T(\rho)$ не изменяется при замене $U(z)$ на $-U(z)$, или, более точно, два значения $T(\rho, U)$ и $T(\rho, -U)$ имеют разность, которая равна константе.

Отсюда вытекает некоторый закон равновесия между двумя членами m и N. Если один увеличивается, при изменении знака у функции U (т. е. при перестановке u и v), то другой уменьшается.

2. Свойства функции $T(\rho)$. Покажем теперь, что характеристическая функция $T(\rho, U)$ не убывает, когда ρ возрастает.

Применяя формулу (1) к функции $v(z)$ и вычитая вновь полученную формулу из соотношения (1), найдем:

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)} d\theta - \iint \ln\left|\frac{\rho^2 - \bar{z}\zeta}{\rho(z-\zeta)}\right| d\mu + \\ + \iint \ln\left|\frac{\rho^2 - \bar{z}\zeta}{\rho(z-\zeta)}\right| d\nu,$$

где $d\nu$—элемент массы, относящийся к функции v. Введем обозначения

$$U_\rho^+(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)} d\theta,$$

$$U_{+\rho}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_+(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \varphi)} d\theta,$$

$$V_\rho^+(z) = \iint \ln\left|\frac{\rho^2 - \bar{z}\zeta}{\rho(z-\zeta)}\right| d\nu, \quad V_{+\rho}(z) = \iint \ln\left|\frac{\rho^2 - \bar{z}\zeta}{\rho(z-\zeta)}\right| d\mu$$

и перепишем предыдущую формулу в виде:

$$U(re^{i\varphi}) = U_\rho^+(re^{i\varphi}) + V_\rho^+(re^{i\varphi}) - U_{+\rho}(re^{i\varphi}) - V_{+\rho}(re^{i\varphi}),$$

откуда вытекает неравенство:

$$U^+(re^{i\varphi}) \leqslant U_\rho^+(re^{i\varphi}) + V_\rho^+(re^{i\varphi}).$$

Беря среднее значение по φ в пределах $0, 2\pi$, найдем:

$$m^+(r, U) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\rho^+(re^{i\varphi})\, d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\rho^+(re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{4}$$

Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_\rho^+(re^{i\varphi})\, d\varphi = U_\rho^+(0) = m^+(\rho, U)$$

и $V_\rho^+(z) - V_r^+(z)$ — гармоническая при $|z| < r$, равная $V_\rho^+(re^{i\varphi})$ на окружности $|z| = r$, найдем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\rho^+(re^{i\varphi})\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\rho^+(re^{i\varphi}) - V_r^+(re^{i\varphi})\, d\varphi =$$

$$= (V_\rho^+ - V_r^+)_{r=0} = N(\rho, \nu) - N(r, \nu).$$

Следовательно неравенство (4) запишется так:

$$m^+(r, U) \leqslant m^+(\rho, U) + N(\rho, \nu) - N(r, \nu)$$

или $T(r) \leqslant T(\rho)$, что и нужно.

Покажем далее, что $T(\rho)$ есть функция, выпуклая относительно $\ln \rho$ в интервале $0 < \rho < R$. Обозначим через $G(\zeta, z)$ функцию Грина для кольца $r \leqslant |\zeta| \leqslant \rho$ с логарифмической особенностью при $\zeta = z$ и положим:

$$W^+(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma U^+(\zeta)\frac{\partial G(\zeta, z)}{\partial n}\, ds + \iint G(\zeta, z)\, d\omega,$$

где интегрирование относится к кольцу $r \leqslant |\zeta| \leqslant \rho$ и Γ—контур этого кольца.

Согласно формуле F. Riesz'a, имеем:

$$U(z) = W^+(z) - W_+(z),$$

откуда вытекает

$$U^+(z) \leqslant W^+(z).$$

Обозначим через t любое число, промежуточное между r и ρ, $r \leqslant t \leqslant \rho$, и, считая $z = te^{i\varphi}$, возьмем средние значения относительно φ обеих частей последнего неравенства:

$$m^+(t, U) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W^+(te^{i\varphi})\, d\varphi.$$

С другой стороны, мы видели, что

$$N(t, \nu) = N(\rho, \nu) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\rho^+(te^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Складывая последние два неравенства, найдем:

$$m^+(t, U) + N(t, \nu) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(te^{i\varphi})\, d\varphi, \tag{5}$$

где положено:

$$A(z) = W^+(z) - V_\rho^+(z) + N(\rho, \nu).$$

Функция $A(z)$ — гармоническая внутри кольца $r < |z| < \rho$. На его границе имеем:

$$A(\rho e^{i\varphi}) = U^+(\rho e^{i\varphi}) + N(\rho, \nu)$$

и следовательно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(\rho e^{i\varphi})\,d\varphi = m^+(\rho, U) + N(\rho, v) = T(\rho).$$

Далее

$$A(re^{i\varphi}) = U^+(re^{i\varphi}) + N(\rho, v) - V_\rho^+(re^{i\varphi})$$

и значит

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(re^{i\varphi})\,d\varphi = m^+(r, U) + N(\rho, v) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_\rho^+(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(re^{i\varphi})\,d\varphi = m^+(r, U) + N(r, v) = T(r).$$

Итак, неравенство (5) имеет вид:

$$T(t) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(te^{i\varphi})\,d\varphi,$$

где правая часть есть линейная функция относительно $\ln t$ [потому что $A(z)$—гармоническая в кольце $r < t < \rho$], равная $T(r)$ при $t = r$ и равная $T(\rho)$ для $t = \rho$.

Это значит, что $T(t)$—выпуклая функция относительно $\ln t$, что и требовалось доказать.

3. Свойства функции N. Очевидно имеем:

$$\frac{dN(\rho, v)}{d\ln\rho} = n(\rho, v).$$

Так как $n(\rho, v)$ положительная, не убывающая функция, то $N(\rho, v)$ не убывающая и выпуклая относительно $\ln\rho$.

То же заключение имеет место и для $N(\rho, u)$.

4. Приложения к субгармоническим функциям. В случае, когда $U_{(z)} = u(z)$ есть субгармоническая функция в круге $|z| < R$, формула (II) переходит в формулу (I). Эта же последняя может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta = N(\rho, u) + c. \qquad (\mathrm{I}'')$$

Отсюда видно, что среднее значение субгармонической функции на окружности $|z| = \rho$, с точностью до придаточного постоянного, совпадает со средним распределением ее масс в круге $|z| \leqslant \rho$. В частности из свойства функции $N(\rho, u)$ вытекает, что среднее значение субгармонической функции на окружности $|z| = \rho$ есть функция, не убывающая и выпуклая относительно $\ln\rho$ (результат F. Riesz'a).

Любопытно заметить, что из формулы (I) вытекает: если

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(1),$$

то à fortiori и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(1),$$

а значит

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(\rho e^{i\theta})|\,d\theta = O(1).$$

Другими словами, условия

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(1) \text{ и } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(\rho e^{i\theta})|\,d\theta = O(1)$$

эквивалентны.

Формула (I′) позволяет оценить разность между средним значением субгармонической функции на окружности $|z| = \rho$ и ее значением в центре $z = 0$, предполагая это последнее конечным. Действительно, из формулы (I′) находим:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta - u(O) = \int_0^{\rho} \frac{n(r, u)}{r}\,dr.$$

Обозначим через σ плотность массы в точке $z = 0$, т. е. $n(r, u) \approx \approx \pi r^2 \sigma$; тогда будет:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta - u(O) \approx \frac{\pi\sigma\rho^2}{2},$$

откуда

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta - u(o)}{\frac{\rho^2}{4}} = 2\pi\sigma.$$

Левая часть последнего равенства есть обобщенный дифференциальный параметр Лапласа $\Delta^*(u)$ в точке $z = 0$, введенный нами в статье «Sur les fonctions harmoniques» (Мат. сб., 1925). Полученное соотношение есть обобщенное уравнение Poisson'а:

$$\Delta^* u = 2\pi\sigma.$$

5. Исследование характеристической функции $T(\rho)$ во всей плоскости. Предполагая функцию $U(z) = u(z) - v(z)$ определенной во всей плоскости комплексного переменного z, рассмотрим ее характеристическую функцию $T(\rho)$. Допустим, что $T(\rho) = o(\ln\rho)$, т. е. отношение $\frac{T(\rho)}{\ln\rho}$ стремится к нулю, когда ρ неограниченно возрастает. При этом условии мы докажем, что $U(z) = \text{const}$. В самом деле, так как $T(\rho)$ — возрастающая выпуклая функция относительно $\ln\rho$, то условие $T(\rho) = o(\ln\rho)$ влечет $T(\rho) = \text{const}$. Применяя

формулу (II) при условии $T(\rho) = \mathrm{const}$, мы немедленно заключаем, что U—гармоническая функция, подчиненная условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \mathrm{const},$$

так как функции $N(\rho, u)$ и $'N(\rho, v)$, как ограниченные возрастающие и выпуклые относительно $\ln \rho$, должны вырождаться в постоянные, что означает отсутствие масс у функций u и v.

Из условия же

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta = \mathrm{const}$$

для гармонической функции $U(z)$ вытекает, посредством интеграла Poisson'a, что, $U(z) = \mathrm{const}$.

В случае, если $u(z)$ есть гармоническая во всей плоскости, то

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta$$

и из условия $T(\rho) = o(\ln \rho)$ следует, как было доказано Nevanlinna, что $u(z) = \mathrm{const}$. Предположим теперь, что

$$p(z) = \iint \ln r\, d\mu(\zeta) - \iint \ln r\, d\nu(\zeta), \qquad r = |z - \zeta|$$

есть разность двух логарифмических потенциалов с ограниченной массой распределения, а $g(z)$ произвольная гармоническая функция, не равная константе. Тогда функция

$$U(z) = p(z) + g(z)$$

удовлетворяет условию:

$$\varlimsup_{\rho\to\infty} \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta}{\ln \rho} = \infty.$$

В самом деле, известно, что имеют место следующие соотношения:

$$\varlimsup_{\rho\to\infty} \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta}{\ln \rho} = \infty, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta = O(\ln \rho).$$

Из неравенства $g^+(z) \leqslant U^+(z) + p_+(z)$ вытекает:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_+(\rho e^{i\theta})\, d\theta. \qquad (6)$$

Если, противно нашему утверждению, мы предположим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho),$$

то из последнего неравенства (6) будет следовать:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho),$$

потому что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho)$$

согласно формуле (II) вследствие ограниченности массы. Равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho)$$

противоречиво.

Выяснив это, обратимся к исследованию общей функции $U(z) = u(z) - v(z)$ в предположении, что $T(\rho, U) = O(\ln\rho)$. Из формулы (II) немедленно вытекает, что массы $n(\rho, u)$ и $n(\rho, v)$ ограничены.

Построив логарифмические потенциалы с теми же распределениями масс, что у функций u и v: $\iint \ln r\,d\mu(\zeta)$, $\iint \ln r\,d\nu(\zeta)$, мы заключаем: $u(z) = \iint \ln r\,d\mu(\zeta) +$ гармоническая функция, $v(z) = \iint \ln r\,d\nu(\zeta) +$ гармоническая функция.

Следовательно $U(z) = \iint \ln r\,d\mu(\zeta) - \iint \ln r\,d\nu(\zeta) + g(z)$, где $g(z)$ — гармоническая функция.

По вышедоказанному из условия

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(\rho e^{i\theta})\,d\theta = O(\ln\rho)$$

следует, что

$$g(z) = \text{const}.$$

Итак, если $T(\rho, U) = O(\ln\rho)$, то

$$U(z) = \iint \ln r\,d\mu - \iint \ln r\,d\nu + \text{const}, \tag{7}$$

причем массы в обоих потенциалах ограничены. Обратное заключение очевидно. Таким образом условие $T(\rho, U) = O(\ln\rho)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $U(z)$ была разностью двух логарифмических потенциалов с ограниченными массами (с точностью до придаточной константы). Особого внимания заслуживает частный случай, когда субгармонические функции $u(z)$ и $v(z)$ имеют

исключительно дискретные массы. В этом случае соотношение (7) примет вид:

$$U(z)=\sum_{k=1}^{n}\mu_k \ln|z-\zeta_k| - \sum_{k=1}^{m}\nu_k \ln|z-\zeta'_k| + \text{const} \tag{8}$$

или

$$U(z)=\ln\left| C\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(z-\zeta_k)^{\mu_k}}{\prod_{k=1}^{m}(z-\zeta'_k)^{\nu_k}}\right|. \tag{8'}$$

Наконец, предполагая дискретные массы μ_k и ν_k целыми числами, будем иметь результат Nevanlinna, относящийся к рациональным функциям комплексного переменного.

I. PRIWALOFF. SUR LA GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE DE JENSEN. [RÉSUMÉ]

Considérons une fonction $U(z)=u(z)-v(z)$, $u(z)$ et $v(z)$ étant de fonctions subharmoniques dans le cercle $|z|<R$. En désignant par $n(\rho, u)$ la masse relative à la fonction $u(z)$ dans le cercle $|z|\leqslant\rho<R$, posons:

$$m^{+}(\rho, U)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} U^{+}(\rho e^{i\theta})\,d\theta,$$

$$m_{+}(\rho, U)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} U_{+}(\rho e^{i\theta})\,d\theta,$$

$$N(\rho, u)=\int_{0}^{\rho}\frac{n(r, u)-n(0, u)}{r}\,dr+n(0, u)\ln\rho.$$

On établie alors la formule suivante:

$$m^{+}(\rho, U)+N(\rho, v)=m_{+}(\rho, U)+N(\rho, u)+C \tag{I}$$

qui généralise la relation connue de Jensen-Nevanlinna. Posons

$$T(\rho)=T(\rho, U)=m^{+}(\rho, U)+N(\rho, v).$$

On démontre alors que la fonction $T(\rho)$ est une fonction non décroissante, convexe par rapport à $\ln\rho$ dans l'intervalle $0<\rho<R$.

La fonction N a des propriétés analogues. On considère ensuite les applications de la formule (I) à de fonctions subharmoniques et on déduit les résultats suivants:

1. La valeur moyenne sur le cercle $|z|=\rho$ d'une fonction subharmonique coïncide, à une constante additive près, avec la distribution moyenne des masses relatives à cette fonction dans le cercle $|z|\leqslant\rho$. On a, en particulier, le résultat connu de F. Riesz.

2. Les conditions

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u^{+}(\rho e^{i\theta})\,d\theta=O(1) \text{ et } \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}|u(\rho e^{i\theta})|\,d\theta=O(1)$$

sont équivalentes.

3. On démontre ensuite que la fonction subharmonique satisfait à l'équation généralisée de Poisson

$$\Delta^*(u) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})\,d\theta - u(o)}{\frac{\rho^2}{4}} = 2\pi\sigma,$$

où σ est la densité dans le point $z=0$.

On considère enfin la conduite de la fonction $T(\rho, U)$ dans tout le plan, et on déduit des propositions suivantes;

1. Si $T(\rho, U) = o(\ln\rho)$, on a $U(z) = \text{const}$:

2. La condition $T(\rho, U) = O(\ln\rho)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que

$$U(z) = \iint \ln|z-\zeta|\,d\mu(\zeta) - \iint \ln|z-\zeta|\,d\nu(\zeta) + \text{const},$$

les masses de deux potentielles étant bornées. En particulier, la distribution des masses étant discrète, la condition $T(\rho) = O(\ln\rho)$ est nécessaire et suffisante pour que

$$U(z) = \ln\left| C\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\zeta_k)^{\mu_k}}{\prod\limits_{k=1}^{m}(z-\zeta_k')^{\nu_k}}\right|.$$

En supposant, de plus, que les masses discrètes sont entières, on a le résultat connu de Nevanlinna pour les fonctions rationelles.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ JENSEN'a. II

И. И. ПРИВАЛОВА

(*Представлено академиком* **Н. Н. Лузиным**)

В предыдущей своей статье я дал обобщение известной формулы Jensen'a, рассматривая субгармонические функции от двух независимых переменных. В настоящей работе я имею в виду распространить эту формулу на случай субгармонических функций любого числа независимых переменных и дать некоторые ее приложения. Пусть $u(M)$ есть функция субгармоническая внутри шара с центром в начале координат радиуса R пространства точек M любого числа $p>2$ измерений. Рассмотрим концентрическую сферу любого радиуса $\rho<R$ и построим функцию Грина $G(M, P)$ для области, ограниченной этой сферой, с полярной особенностью при $M=P$:

$$G(M, P)=\frac{1}{(PM)^{p-2}}-\frac{1}{(P^*M)^{p-2}}\left(\frac{\rho}{OP}\right)^{p-2},$$

где P^* есть точка, симметричная с P относительно сферы радиуса ρ.

Согласно формуле F. Riesz'a, получим:

$$u(P)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}\rho}\int_{\sigma} u(M)\frac{\rho^2-\overline{OP}^2}{\overline{PM}^p}\,d\sigma-\int_{\omega} G(M, P)\,d\mu(M),$$

где первый интеграл распространен по поверхности σ сферы радиуса ρ, а второй объемный интеграл распространен по области шара радиуса ρ и понимается в смысле Стильтьеса [$d\mu(M)$ есть масса элементарного объема, окружающего точку M].

Считая сначала $u(O)$ конечным числом, положим $P=O$, тогда получим:

$$u(O)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}\rho^{p-1}}\int_{\sigma} u(M)\,d\sigma-\int_{\omega} G(M, O)\,d\mu(M),$$

где положено:

$$G(M, O)=\frac{1}{OM^{p-2}}-\frac{1}{\rho^{p-2}}.$$

В случае $u(O) = -\infty$, положим:

$$\lim_{P\to O}\left[u(P) + \mu(O)\frac{1}{OP^{p-2}}\right] = c$$

и применим предыдущую формулу, заменяя $u(M)$ через $u(M) + \mu(O)\frac{1}{OM^{p-2}}$. Тогда найдем:

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}\rho^{p-1}}\int_\sigma u(M)\,d\sigma + \mu(O)\frac{1}{\rho^{p-2}} - \int_{\omega_0} G(M, 0)\,d\mu(M),$$

где последний интеграл распространен по области шара $0 < OM \leqslant \rho$ за исключением точки O.

Последний интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int_{\omega_0} G(M, O)\,d\mu(M) = \int_0^\rho dr\int_\sigma G(M, O)\frac{d\mu}{d\omega}\cdot d\sigma.$$

Обозначим через $n(r, u)$ массу, порождаемую функцией $u(M)$, находящуюся внутри шара радиуса r:

$$dr\int_\sigma \frac{d\mu}{d\omega}\cdot d\sigma = dn(r, u).$$

Тогда будем иметь:

$$\int_{\omega_0} G(M, O)\,d\mu(M) = \int_{+0}^\rho G(M, O)\,dn(r, u) =$$

$$= \int_0^\rho\left(\frac{1}{r^{p-2}} - \frac{1}{\rho^{p-2}}\right)d\left[n(r, u) - n(o, u)\right] = (p-2)\int_0^\rho \frac{n(r, u) - n(o, u)}{r^{p-1}}\,dr.$$

Введем сокращенные обозначения:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}\rho^{p-1}}\int_\sigma u^+(M)\,d\sigma = m^+(\rho, u),$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}\rho^{p-1}}\int_\sigma u_+(M)\,d\sigma = m_+(\rho, u),$$

$$(p-2)\int_0^\rho \frac{n(r, u) - n(o, u)}{r^{p-1}}\,dr - n(o, u)\frac{1}{\rho^{p-2}} = N(\rho, u).$$

Тогда получим соотношение:

$$m^+(\rho, u) = m_+(\rho, u) + N(\rho, u) + c. \qquad (I)$$

Последняя формула есть частный случай более общей и симметричной, каковую установим так же, как и в первой статье, если примем $U(M) = u(M) - v(M)$, считая $u(M)$ и $v(M)$ субгармоничными функциями внутри шара $\rho < R$.

$$m^+(\rho, U) + N(\rho, v) = m_+(\rho, U) + N(\rho, u) + \text{const.} \qquad \text{(II)}$$

Называя $m^+(\rho, U) + N(\rho, v)$ характеристической функцией для $U(M)$ и обозначая ее через $T(\rho, U)$, перепишем соотношение (II) в виде:

$$T(\rho, U) = T(\rho, -U) + \text{const.} \qquad \text{(II')}$$

Соотношение (II) выражает закон равновесия между членами m и N при взаимной перестановке u и v. Очевидно, что $N(\rho, u)$ будет функцией, возрастающей относительно ρ и выпуклой относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ в интервале $0 < \rho < R$, потому что производная от $N(\rho, u)$ относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ равна $-n(\rho, u)$, т. е. величине, отрицательной и возрастающей вместе с $\frac{1}{\rho^{p-2}}$.

Из формулы (I) то же заключение имеет место для

$$m^+(\rho, u) - m_+(\rho, u) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}\rho^{p-1}} \int_\sigma u(M)\, d\sigma,$$

т. е. для среднего значения субгармонической функции на сфере радиуса ρ (теорема Riesz'a). Из той же формулы (I) мы усматриваем, что необходимое и достаточное условие для существования мажоранты субгармонической функции $u(M)$ во всем шаре $\rho < R$ будет:

$$N(\rho, u) < C.$$

Формула (I), далее, позволяет заключить, что условия

$$\frac{1}{\sigma}\int_\sigma |u(M)|\, d\sigma = O(1) \text{ и } \frac{1}{\sigma}\int_\sigma u^+(M)\, d\sigma = O(1)$$

равносильны. Наконец та же формула (I) показывает, что субгармоническая функция удовлетворяет обобщенному уравнению Poisson'a:

$$\Delta^* u(O) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\frac{1}{\sigma}\int_\sigma u(M)\, d\sigma - u(O)}{\frac{\rho^2}{2p}} = \frac{p(p-2)\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \nu,$$

где ν — плотность массы в точке O.

Покажем теперь, что характеристическая функция $T(\rho, U)$ — возрастающая и выпуклая относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ в интервале $0 < \rho < R$. С этой целью

будем отправляться от формулы:

$$U(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}\rho} \int_{\sigma} U(M) \frac{\rho^2 - \overline{OP}^2}{\overline{PM}^p} d\sigma - \int_{\omega} G(M, P)\, d\mu +$$

$$+ \int_{\omega} G(M, P)\, d\mu'.$$

Введем сокращенные обозначения:

$$U_{\rho}^{+}(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}\rho} \int_{\sigma} U^{+}(M) \frac{\rho^2 - \overline{OP}^2}{\overline{PM}^p} d\sigma,$$

$$V_{\rho}^{+}(P) = \int_{\omega} G(M, P)\, d\mu';$$

аналогично

$$V_{+\rho}(P) = \int_{\omega} G(M, P)\, d\mu \text{ и } U_{+\rho}(P).$$

В этих обозначениях наша формула примет вид:

$$U(P) = U_{\rho}^{+}(P) + V_{\rho}^{+}(P) - U_{+\rho}(P) - V_{+\rho}(P),$$

откуда следует

$$U^{+}(P) \leqslant U_{\rho}^{+}(P) + V_{\rho}^{+}(P).$$

Переходя к средним значениям на сфере радиуса r, $r < \rho$, получим

$$m^{+}(r, U) \leqslant \frac{1}{\sigma'} \int_{\sigma'} U_{\rho}^{+}(P)\, d\sigma' + \frac{1}{\sigma'} \int_{\sigma'} V_{\rho}^{+}(P)\, d\sigma'.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\sigma'} \int_{\sigma'} U_{\rho}^{+}(P)\, d\sigma' = U_{\rho}^{+}(O) = m^{+}(\rho, U)$$

и

$$\frac{1}{\sigma'} \int_{\sigma'} V_{\rho}^{+}(P)\, d\sigma' = \frac{1}{\sigma'} \int_{\sigma'} [V_{\rho}^{+}(P) - V_{r}^{+}(P)]\, d\sigma' =$$

$$= [V_{\rho}^{+}(P) - V_{r}^{+}(P)]_{P=O} = N(\rho, \nu) - N(r, \nu).$$

Тогда найдем:

$$m^{+}(r, U) \leqslant m^{+}(\rho, U) + N(\rho, \nu) - N(r, \nu)$$

или

$$T(r, U) \leqslant T(\rho, U),$$

что доказывает возрастание характеристической функции.

Чтобы доказать выпуклость характеристической функции $T(\rho, U)$ относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$, будем исходить из формулы:

$$W^+(P) = -\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{p\pi^{\frac{p}{2}}} \int\limits_{\Sigma} U^+(M) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n} d\sum + \int\limits_{\Omega} G(M, P)\, d\mu',$$

где интегралы относятся к сферическому кольцу $r \leqslant OM \leqslant \rho$ и $G(M, P)$— функция Грина для этого кольца.

При этом обозначении имеем:

$$U(P) = W^+(P) - W_+(P),$$

откуда

$$U^+(P) \leqslant W^+(P).$$

Считая $r \leqslant t = OP \leqslant \rho$, переходим к средним значениям на сфере радиуса t:

$$m^+(t, U) \leqslant \frac{1}{\Sigma} \int\limits_{\Sigma} W^+(P)\, d\sum.$$

С другой стороны, мы выше имели:

$$N(t, v) = N(\rho, v) - \frac{1}{\Sigma} \int\limits_{\Sigma} V_\rho^+(P)\, d\sum.$$

Складывая два последние соотношения, получим:

$$m^+(t, U) + N(t, v) \leqslant \frac{1}{\Sigma} \int\limits_{\Sigma} A(P)\, d\sum,$$

где положено:

$$A(P) = W^+(P) - V_\rho^+(P) + N(\rho, v).$$

Функция $A(P)$—гармоническая внутри сферического кольца $r < OP < \rho$.

С другой стороны, на сфере радиуса ρ имеем $A(P) = U^+(P) + N(\rho, v)$ и, переходя к средним значениям:

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_{\sigma} A(P)\, d\sigma = m^+(\rho, U) + N(\rho, v) = T(\rho, U).$$

На сфере же радиуса r будет:

$$A(P) = U^+(P) + N(\rho, v) - V_\rho^+(P),$$

откуда, переходя к средним значениям, найдем:

$$\frac{1}{\sigma'} \int\limits_{\sigma'} A(P)\, d\sigma' = m^+(r, U) + N(\rho, v) - \frac{1}{\sigma'} \int\limits_{\sigma'} V_\rho^+(P)\, d\sigma' =$$

$$= m^+(r, U) + N(r, v) = T(r, U).$$

Итак, доказано, что

$$T(t, U) \leqslant \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} A(P)\, d\sum,$$

причем правая часть равна $T(r, U)$ при $t = r$ и равна $T(\rho, U)$ для $t = \rho$. Заметив наконец, что среднее значение на сфере $\sum$ функции $A(P)$, гармонической в сферическом кольце, есть линейная функция относительно $\frac{1}{t^{p-2}}$, мы заключаем о выпуклости функции $T(\rho)$ относительно $\frac{1}{\rho^{p-2}}$.

Необходимое и достаточное условие для представимости функции $U(P) = u(P) - v(P)$ в виде разности двух отрицательных субгармонических функций внутри шара $OP < 1$ будет: $T(\rho, U) < C$ для любого $\rho < 1$. Точка P принадлежит пространству p измерений, $p \geqslant 2$.

В самом деле, пусть $U(P) = u(P) - v(P)$ есть разность двух отрицательных субгармонических функций внутри шара $OP < 1$. Заметив, что $U(P) < -v(P)$ и, значит, $U^{+}(P) < -v(P)$, получаем:

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} U^{+}(P)\, d\sigma < -\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} v(P)\, d\sigma.$$

Так как в силу формулы (I)

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} v(P)\, d\sigma = N(\rho, v) - C,$$

то будем иметь:

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} U^{+}(P)\, d\sigma + N(\rho, v) < C$$

или

$$T(\rho, U) < C.$$

Обратно, допустим, что характеристическая функция $T(\rho, U)$ для разности двух субгармонических функций $U(P) = u(P) - v(P)$ остается величиной ограниченной, т. е. $T(\rho, U) < C$. При этих условиях покажем, что функцию $U(P)$ можно представить в виде разности отрицательных субгармонических функций.

Согласно условию имеем:

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} U^{+}(P)\, d\sigma = O(1), \quad N(\rho, v) < C.$$

Формула для $N(\rho, v)$ в случае $p > 2$ дана в настоящей статье, при $p = 2$ в предыдущей работе.

По основной формуле, обобщающей соотношение Jensen'а, будет:

$$T(\rho, U) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} U_{+}(P)\, d\sigma + N(\rho, u) + \text{const}$$

[формула (II) этой или предыдущей статьи].

Следовательно справедливы соотношения:

$$N(\rho, u) < C', \quad N(\rho, v) < C.$$

В силу последних соотношений заключаем, что субгармонические функции $u(P)$ и $v(P)$ имеют в единичном шаре гармонические мажоранты. Пусть $u^*(P)$ и $v^*(P)$—гармонические мажоранты в единичном шаре соответственно для $u(P)$ и $v(P)$. Представив $U(P)=u(P)-v(P)$ в виде

$$U(P)=[u(P)-u^*(P)]-[v(P)-v^*(P)]+u^*(P)-v^*(P)$$

и полагая

$$u_1(P)=u(P)-u^*(P),$$
$$v_1(P)=v(P)-v^*(P),$$
$$u^*(P)-v^*(P)=g(P),$$

будем иметь:

$$U(P)=u_1(P)-v_1(P)+g(P),$$

где $u_1(P)$ и $v_1(P)$—отрицательные субгармонические функции, а $g(P)$ гармоническая функция.

По условию

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} U^+(P)\,d\sigma=O(1),$$

а по доказанному

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}[u_1(P)-v_1(P)]^+\,d\sigma=O(1).$$

Положим

$$U_1(P)=u_1(P)-v_1(P);$$

тогда

$$g(P)=U(P)-U_1(P)$$

и значит

$$|g(P)|\leqslant|U(P)|+|U_1(P)|.$$

Следовательно

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}|g(P)|\,d\sigma\leqslant\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}U^+(P)\,d\sigma+\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}U_+(P)\,d\sigma+\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}U_1^+(P)\,d\sigma+$$
$$+\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}U_{+1}(P)\,d\sigma=O(1).$$

Ограниченность выражений

$$\frac{1}{\sigma}\int U_+(P)\,d\sigma \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sigma}\int U_{+1}(P)\,d\sigma$$

вытекает из основной формулы (II) на основании условий: $T(\rho,U)<C$ и $T(\rho,U_1)<C_1$. Из доказанного соотношения

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma}|g(P)|\,d\sigma=O(1)$$

заключаем, что гармоническая функция $g(P)$ представима в виде разности $g_1(P)-g_2(P)$ гармонических положительных функций.

После этого имеем:

$$U(P) = u_1(P) - v_1(P) + g_1(P) - g_2(P) =$$
$$= [u_1(P) - g_2(P)] - [v_1(P) - g_1(P)],$$

т. е. $U(P)$ представлена в виде разности двух субгармонических отрицательных функций, что и нужно.

Из только что доказанной теоремы вытекает необходимое и достаточное условие для представимости функции

$$V(P) = \frac{a(P)}{b(P)},$$

являющейся отношением двух логарифмически субгармонических функций, в виде отношения ограниченных логарифмически субгармонических функций. Для получения этого условия нужно положить $U(P) = \ln V(P)$, $u(P) = \ln a(P)$, $v(P) = \ln b(P)$ и применить предыдущую теорему.

Искомое условие будет:

$$\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} \ln^{+} V(P)\, d\sigma + N(\rho, \ln b) < C,$$

т. е.

$$T(\rho, \ln V) < C.$$

В частности, полагая $a(z) = |g(z)|$, $b(z) = |h(z)|$, где $g(z)$ и $h(z)$ — голоморфные функции в круге $|z| < 1$, по модулю меньшие 1, найдем условие R. Nevanlinna для представимости функции $f(z)$, мероморфной в круге $|z| < 1$, в виде отношения двух ограниченных голоморфных функций:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Это условие запишется в виде $T(\rho, f) < C$, где $T(\rho, f)$ — характеристическая функция для функции $f(z)$, мероморфной внутри круга $|z| < 1$.

I. PRIWALOFF. SUR LA GÉNÉRALISATION D'UNE FORMULE DE JENSEN. II

RÉSUMÉ

Considérons une fonction $U(P) = u(P) - v(P)$, $u(P)$ et $v(P)$ étant de fonctions subharmoniques dans la sphère $OP < R$ d'espace à p dimensions, $p > 2$.

En désignant par $n(\rho, u)$ la masse relative à la fonction $u(P)$ dans la sphère $OP \leqslant \rho < R$, posons:

$$m^{+}(\rho, U) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} U^{+}(P)\, d\sigma \left[\sigma = \frac{p\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}\rho^{p-1}\right],$$

$$m_{+}(\rho, U) = \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} U_{+}(P)\, d\sigma,$$

$$N(\rho, u) = (p-2)\int\limits_{0}^{\rho} \frac{n(r, u) - n(o, u)}{r^{p-1}}\, dr - n(o, u)\frac{1}{\rho^{p-2}};$$

On établie alors la formule suivante

$$m^{+}(\rho, U)+N(\rho, v)=m_{+}^{*}(\rho, U)+N(\rho, u)+\text{const}, \qquad \text{(I)}$$

qui généralise la rélation connue de Jensen-Nevanlinna.

Posons

$$T(\rho)=T(\rho, U)=m^{+}(\rho, U)+N(\rho, v).$$

On démontre alors que la fonction $T(\rho)$ est une fonction non décroissante, convexe par rapport à $\frac{1}{\rho^{p-2}}$ dans l'intervalle $0<\rho<R$.

La fonction N a des propriétés analogues. On considère ensuite les applications de la formule (I) à de fonctions subharmoniques et on déduit les résultats suivants.

1. La valeur moyenne sur la sphère $OP=\rho$ d'une fonction subharmonique coïncide, à une constante additive près, avec la distribution moyenne des masses relatives à cette fonction dans la sphère $OP \leqslant \rho$. On a en particulier le résultat connu de F. Riesz.

2. Les conditions

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u^{+}(P)\, d\sigma=O(1)$$

et

$$\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} |u(P)|\, d\sigma=O(1)$$

sont équivalentes.

3. On démontre ensuite que la fonction subharmonique satisfait à l'équation généralisée de Poisson

$$\Delta^{*} u(O)=\lim_{\rho \to 0} \frac{\frac{1}{\sigma}\int_{\sigma} u(P)\, d\sigma-u(O)}{\frac{\rho^{2}}{2p}}=\frac{p(p-2)\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}\nu,$$

où ν est la densité dans le point O.

On démontre enfin que la condition $T(\rho, U)<C$ est nécessaire et suffisante pour que la fonction $U(P)=u(P)-v(P)$ soit représentable à l'intérieur de la sphère $OP<1$ sous une forme de différence de deux fonctions négatives subharmoniques. Un point P appartient à l'espace à nombre quelconque p de dimensions, $p \geqslant 2$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Г. Т. СОКОЛОВА

§ 1. Введение

Пусть

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x) \tag{1}$$

есть тригонометрическая сумма порядка n, с вещественными коэффициентами, которая удовлетворяет условию $|f(x)| \leqslant L$ для всех вещественных значений x [в дальнейшем символы a_ν и b_ν будут обозначать коэффициенты суммы (1)]. Обозначим через $g(x)$ тригонометрическую сумму, сопряженную сумме (1), т. е.

$$g(x)=\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu \cos \nu x-a_\nu \sin \nu x).$$

Szegö[1] доказал следующую теорему: если $f(x)$ есть тригонометрическая сумма (1), то для всех вещественных значений x имеет место неравенство

$$\sqrt{\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2} \leqslant nL.$$

Отсюда следует, что для всех вещественных значений x

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} \nu(a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant nL$$

и

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \nu(b_\nu \cos \nu x-a_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant nL.$$

Для всех целых положительных значений α очевидно будут справедливы неравенства

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} \nu^\alpha(a_\nu \cos \nu x+b_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant n^\alpha L,$$

[1] Szegö, Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein, Schriften d. Königsberger Gelehrten Ges., 1928, Jahrb., Naturwissenschaftliche Klasse, Heft 4, S. 59—70.

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha}(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x)\right|\leqslant n^{\alpha}L.$$

Академик С. Н. Бернштейн поставил задачу об оценке наибольшего значения каждого из выражений:

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\nu^{\alpha}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\right|,$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha}(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x)\right|$$

при любом вещественном значении α. При исследовании вопроса, поставленного С. Н. Бернштейном, мною получены следующие результаты.

Если $\alpha\geqslant 1$, то при любом значении n

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\nu^{\alpha}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\right|\leqslant n^{\alpha}L \tag{I}$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha}(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x)\right|\leqslant n^{\alpha}L. \tag{II}$$

Если $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, то при любом значении n

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\nu^{\alpha}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\right|\leqslant\frac{2n^{\alpha}L}{1+\alpha} \tag{III}$$

и для $n\to\infty$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha}(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x)\right|<$$

$$<\frac{2L}{\pi}\left[\frac{4\alpha^2+14\alpha+26}{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)}n^{\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\right)\pi\Gamma(\alpha+1)}{3^{\alpha+1}}\frac{n^{\alpha}-1}{\alpha}+8\left[1-\Gamma(1+\alpha)\right]\ln n.\right. \tag{IV}$$

Если $\alpha\geqslant 0$, то при любом значении n

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{(\nu+1)^{\alpha}}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\right|\leqslant L. \tag{V}$$

Если $\alpha\geqslant 1$, то при любом значении n

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^{\alpha}}(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x)\right|\leqslant\frac{4L}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\ldots+k\right)=H, \tag{VI}$$

где

$$k=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha+1}}, & \text{если } n \text{ четное}\\[2mm] \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}, & \text{если } n \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то для $n \to \infty$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^{\alpha}} (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant H.$$

Первые результаты этой работы опубликованы в моей заметке «Об одном свойстве тригонометрических сумм» (Доклады Академии Наук СССР, 1934, 11 марта, стр. 439—441).

Выражаю глубокую благодарность С. Н. Бернштейну за указание темы, а также за ценные советы и указания, которые я от него получал при выполнении этой работы.

§ 2. Доказательство неравенств (I) и (II)

Приведем, в качестве вспомогательных, одну теорему Szegö и одну теорему Fejer'a.

Теорема А (Szegö). Пусть $f(x)$ есть тригонометрическая сумма (1). Если сумма косинусов

$$C_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} C_\nu \cos \nu t + C_n \cos nt \tag{2}$$

неотрицательна при любом вещественном значении t, то при любом вещественном значении x справедливо неравенство

$$\sqrt{F^2(x) + G^2(x)} \leqslant C_0 L, \tag{3}$$

где

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_{n-\nu} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x), \tag{4}$$

$$G(x) = \sum_{\nu=1}^{n} C_{n-\nu} (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x). \tag{5}$$

Доказательство. Так как

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left(\frac{C_n}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} C_{n-\nu} \cos \nu t\right) dt,$$

$$G(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t) \sum_{\nu=1}^{n} C_{n-\nu} \sin \nu t\, at,$$

то

$$F(x)\cos\beta - G(x)\sin\beta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left(\frac{C_n}{2}\cos\beta + \sum_{\nu=1}^{n} C_{n-\nu}\cos(\nu t + \beta)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\Big\{ C_0 \cos(nt+\beta) + \sum_{\nu=1}^{n-1} C_{n-\nu}\left[\cos(\nu t+\beta) +\right.$$

$$\left. + \cos[(2n-\nu)t+\beta]\right] + \frac{C_n}{2}[\cos\beta + \cos(2nt+\beta)]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\cos(nt+\beta)\left\{C_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} C_\nu \cos\nu t + C_n \cos nt\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\, h(nt+\beta)\left\{C_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} C_\nu \cos\nu t + C_n \cos nt\right\} dt,$$

где β—любое вещественное число, а $h(u)$ есть функция периода 2π, ряд Фурье которой начинается членом $\cos u$ и такая, что в ряде Фурье для $|h(u)|$ коэффициент при $\cos u$ равен нулю.

Положим, что для $0<r<1$

$$h(r;\,u)=\cos u+r^2\cos 3u+r^4\cos 5u+\ldots+\ldots=\frac{(1-r^2)\cos u}{(1+r^2)^2-4r^2\cos^2 u}.$$

Свободный член ряда Фурье функции $|h(r;\,u)|$ будет $\frac{1}{\pi r}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r}{1-r^2}$, ибо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(r;\,u)|\,du=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-r^2)\cos u}{(1+r^2)^2-4r^2\cos^2 u}\,du-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-r^2)\cos u}{(1+r^2)^2-4r^2\cos^2 u}\,du=\frac{1}{\pi r}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r}{1-r^2}.$$

Коэффициент при $\cos u$ в этом ряде будет равен нулю, ибо

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-r^2)\cos^2 u}{(1+r^2)^2-4r^2\cos^2 u}\,du-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-r^2)\cos^2 u}{(1+r^2)^2-4r^2\cos^2 u}\,du=0.$$

Следовательно

$$|F(x)\cos\beta-G(x)\sin\beta|\leqslant\frac{L}{\pi}\int_0^{2\pi}|h(r;\,u)|\left\{C_0+2\sum_{\nu=1}^{n-1}C_\nu\cos\nu t+C_n\cos nt\right\}dt=$$

$$=\frac{L}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi r}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r}{1-r^2}+\ldots+\ldots\right)\left\{C_0+2\sum_{\nu=1}^{n-1}C_\nu\cos\nu t+C_n\cos nt\right\}dt=$$

$$=\frac{2LC_0}{\pi r}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r}{1-r^2}.$$

При $r\to 1$ будем иметь

$$|F(x)\cos\beta-G(x)\sin\beta|\leqslant C_0L. \tag{6}$$

Так как это неравенство справедливо при любом вещественном значении β, то ему можно придать другой вид, а именно

$$\sqrt{F^2(x)+G^2(x)}\leqslant C_0L. \tag{3}$$

Szegö[1] эта теорема доказана для случая, когда $C_n=0$. Приведенный нами способ доказательства принадлежит Szegö.

Заметим, что если сумма косинусов (2) не при всех вещественных значениях t будет неотрицательна, то неравенство (3) в общем случае не будет справедливо; это видно из следующего примера.

Пусть

$$f(x,\,k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8k}-1\right)+\cos x+k\cos 2x,$$

где $k>\frac{1}{4}$ и не зависит от x, в данном случае

$$|f(x,\,k)|\leqslant L=k+\frac{1}{16k}+\frac{1}{2}.$$

[1] Szegö, цитированная работа, стр. 66—67.

Пусть далее

$$C_0=(\sqrt{2}-\delta)^2,\quad C_1=(\sqrt{2}-\delta),\quad C_2=1,$$

где $0<\delta\leqslant\sqrt{2}-1$, тогда суммы, соответствующие суммам (2), (4) и (5), будут иметь вид

$$S_2=(\sqrt{2}-\delta)^2+2(\sqrt{2}-\delta)\cos t+\cos 2t, \tag{2'}$$

$$F(x, k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8k}-1\right)+(\sqrt{2}-\delta)\cos x+k(\sqrt{2}-\delta)^2\cos 2x, \tag{4'}$$

$$G(x, k)=(\sqrt{2}-\delta)\sin x+k(\sqrt{2}-\delta)^2\sin 2x. \tag{5'}$$

При любом рассматриваемом значении δ сумма (2′) будет не при всяком вещественном значении t неотрицательна, ибо один из ее относительных минимумов равен

$$\frac{(\sqrt{2}-\delta)^2}{2}-1.$$

При любом рассматриваемом значении δ также найдутся такие значения x_1 и k_1, что будет иметь место неравенство

$$\sqrt{F^2(x_1, k_1)+G^2(x_1, k_1)}>(\sqrt{2}-\delta)^2 L.$$

Действительно, при

$$\cos x_1=\frac{1}{4}\,\frac{\frac{1}{8k^2}-\frac{1}{k}+2(\sqrt{2}-\delta)^2}{\left(1-\frac{1}{8k}\right)(\sqrt{2}-\delta)}$$

функция

$$F^2(x, k)+G^2(x, k)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8k}-1\right)^2+(\sqrt{2}-\delta)^2+k^2(\sqrt{2}-\delta)^4+$$
$$+k(\sqrt{2}-\delta)\left[\frac{1}{8k^2}-\frac{1}{k}+2(\sqrt{2}-\delta)^2\right]\cos x+k\left(\frac{1}{8k}-1\right)(\sqrt{2}-\delta)^2\cos 2x$$

имеет относительный максимум, поэтому наибольшее ее значение будет не меньше, чем

$$F^2(x_1, k)+G^2(x_1, k)=\frac{1}{8\left(1-\frac{1}{8k}\right)}\left\{\left[8\left(1-\frac{1}{8k}\right)k^2+4k\right](\sqrt{2}-\delta)^4+\right.$$
$$\left.+8k(\sqrt{2}-\delta)^2+C_1\right\}=M^2,$$

где

$$C_1=2\left(1-\frac{1}{8k}\right)^3+\left(2-\frac{5}{8k}\right)(\sqrt{2}-\delta)^2+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{8k}-1\right)^2.$$

Заметим далее, что

$$[(\sqrt{2}-\delta)^2L]^2=\frac{1}{8\left(1-\frac{1}{8k}\right)}\left\{\left[8\left(1-\frac{1}{8k}\right)k^2+8k\right](\sqrt{2}-\delta)^4+C_2\right\},$$

где

$$C_2=\left[8\left(1-\frac{1}{8k}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16^2k^2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16k}\right)-1\right](\sqrt{2}-\delta)^4.$$

При рассматриваемых значениях δ и k величины C_1 и C_2 ограничены, кроме того

$$4(\sqrt{2}-\delta)^4+8(\sqrt{2}-\delta)^2>8(\sqrt{2}-\delta)^4,$$

поэтому всегда можно выбрать $k=k_1$ достаточно большим, чтобы имело место неравенство

$$M^2>\left\{(\sqrt{2}-\delta)^2L\right\}^2,$$

или

$$\sqrt{F^2(x_1, k_1)+G^2(x_1, k_1)}>(\sqrt{2}-\delta)^2L.$$

Теорема В (Fejer'a[1]). Если в сумме косинусов

$$l_0+2l_1\cos t+2l_2\cos 2t+\ldots+2l_n\cos nt$$

коэффициенты $l_0, l_1, \ldots, l_n$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &l_\nu-2l_{\nu+1}+l_{\nu+2}\geqslant 0, \qquad \nu=0,\ 1,\ \ldots\ (n-2)\\ &l_{n-1}-2l_n\geqslant 0,\ l_n\geqslant 0, \end{aligned} \tag{7}$$

то такая сумма неотрицательна при любом вещественном значении t.

Теорема С. Пусть $f(x)$ есть тригонометрическая сумма (1). Если функция $\varphi(\nu)$ целочисленного переменного ν для $\nu\geqslant 0$ неотрицательна, неубывающая и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\varphi(\nu)-2\varphi(\nu+1)+\varphi(\nu+2)\geqslant 0,\\ &\varphi(2)-2\varphi(1)+\frac{\varphi(0)}{2}\geqslant 0, \end{aligned} \tag{8}$$

то для всех вещественных значений x имеет место неравенство

$$\sqrt{F^2(x)+G^2(x)}\leqslant\varphi(n)L, \tag{9}$$

где

$$F(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\varphi(\nu)(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

$$G(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(\nu)(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x).$$

Доказательство. Так как при условиях (8) числа

$$\varphi(n),\quad \varphi(n-1),\ \ldots,\ \varphi(1),\quad \frac{\varphi(0)}{2}$$

удовлетворяют условиям (7) теоремы В, то сумма косинусов

$$\varphi(n)+2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\cos\nu t+\varphi(0)\cos nt$$

неотрицательна при любом вещественном значении t. Следовательно согласно теореме А неравенство (9) справедливо.

[1] Fejer, Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten, Acta Literarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, том 2, стр. 75—86, 1925.

Равенство в (9) имеет место, когда $f(x) = L \cos n(x-\delta)$, где δ—любое вещественное число. Если $\varphi(0) = 0$, то второе из условий (8) заменяется условием $\varphi(2) - 2\varphi(1) \geqslant 0$.

Полагая в (9) $\varphi(\nu) = \nu^\alpha$, находим, что при $\alpha \geqslant 1$

$$\sqrt{\left\{\sum_{\nu=0}^{n} \nu^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right\}^2 + \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^\alpha (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)\right\}^2} \leqslant n^\alpha L, \quad (10)$$

или

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} \nu^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant n^\alpha L, \quad \text{(I)}$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \nu^\alpha (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant n^\alpha L. \quad \text{(II)}$$

При $0 \leqslant p \leqslant 1$ и $\alpha \geqslant 1$ будет также иметь место неравенство

$$\sqrt{\left\{pa_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right\}^2 + \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^\alpha (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)\right\}^2} \leqslant n^\alpha L,$$

ибо числа n^α, $(n-1)^\alpha$, $\ldots$, 1, $\frac{p}{2}$ удовлетворяют условиям (8).

Из теоремы C вытекает следующее следствие.

Следствие. Пусть $f(x)$ есть тригонометрическая сумма (1). Если функция $\varphi(\nu)$ целочисленного переменного ν для $\nu \geqslant 0$ неотрицательна, неубывающая и удовлетворяет условию

$$\varphi(\nu) - 2\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu+2) \geqslant 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-2) \quad (11)$$

то для всех вещественных значений x имеет место неравенство

$$\left|F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi(\nu)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant \varphi(n) L.$$

В самом деле, полагая $\psi(\nu) = \varphi(\nu) - \varphi(0)$, в силу условия (11) будем иметь

$$\psi(\nu) - 2\psi(\nu+1) + \psi(\nu+2) \geqslant 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-2)$$

$$\psi(2) - 2\psi(1) + \frac{\psi(0)}{2} \geqslant 0.$$

Следовательно

$$\sqrt{F_1^2(x) + G_1^2(x)} \leqslant \psi(n) L, \quad (12)$$

где

$$F_1(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \psi(\nu)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$$G_1(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi(\nu)(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x),$$

или

$$|F_1(x)| \leqslant \psi(n) L,$$

но

$$F_1(x) = F(x) - \varphi(0) f(x),$$

поэтому

$$|F(x)| \leqslant \varphi(n) L.$$

В частности при $\alpha \geqslant 1$ и $\gamma \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+\gamma)^{\alpha} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant (n+\gamma)^{\alpha} L.$$

Если $\varphi(\nu)$ удовлетворяет только условию (11), то неравенство

$$\left|G(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\nu)(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant \varphi(n) L$$

в общем случае не будет справедливо. Однако если $\varphi(\nu)$ возрастает быстрее, чем $\ln \nu$, то при $n \to \infty$

$$\frac{|G(x)|}{\varphi(n)} \leqslant L.$$

Действительно, из неравенства (12) следует, что

$$|G(x)| \leqslant [\varphi(n) - \varphi(0)] L + \varphi(0) \max |g(x)|,$$

но, как будет показано дальше,

$$|g(x)| \leqslant \frac{2L}{\pi}\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right), \tag{13}$$

поэтому

$$\frac{G(x)}{\varphi(n)} \leqslant L + E_n,$$

где E_n стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$.

Докажем справедливость неравенства (13). Так как

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu t\right) dt,$$

то

$$|g(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu t\right| dt.$$

В промежутке $0 < t \leqslant 2\pi$ все нули функции $\sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu t$ — простые вещественные и лежат в точках

$$\nu\frac{2\pi}{n} \text{ и } \nu\frac{2\pi}{n+1}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots n$$

поэтому

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu t\right|dt=\int\limits_0^{\frac{2\pi}{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu t\,dt-\int\limits_{\frac{2\pi}{n+1}}^{\frac{2\pi}{n}}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu t\,dt+$$

$$+\int\limits_{\frac{2\pi}{n}}^{\frac{4\pi}{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu t\,dt-\ldots+\int\limits_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}^{\frac{2n\pi}{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu t\,dt-\int\limits_{\frac{2n\pi}{n+1}}^{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu t\,dt=$$

$$=2\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}+\sum_{\nu-1}^{n}\frac{1}{\nu}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\cos\nu k\frac{2\pi}{n}-\sum_{k=1}^{n}\cos\nu k\frac{2\pi}{n+1}\right)+\frac{n-1}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos kn\frac{2\pi}{n+1}\right\}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos k\nu\frac{2\pi}{n}=-1,\qquad \nu=1,\ \ldots,(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\nu\frac{2\pi}{n+1}=-1,\qquad \nu=1,\ \ldots,n$$

то

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu t\right|dt=2\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}+1\right)$$

или

$$|g(x)|\leqslant\frac{2L}{\pi}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right). \tag{13}$$

Равенство в (13) имеет место, если $f(x)$ представляет собой n-ю частичную сумму ряда Фурье функции $L\ \operatorname{sign}\sum\limits_{\nu=1}^{n}\sin\nu x$, где в обозначении Kronecker'a

$$\operatorname{sign}u=\begin{cases}1, & \text{если } u>0\\ 0, & \text{если } u=0\\ -1, & \text{если } u<0,\end{cases}$$

при этом L будет являться наибольшим абсолютным значением не частичной суммы, а функции, порождающей ряд Фурье.

Если L будет наибольшим абсолютным значением тригонометрической суммы, то в силу явления Gibbs'a равенство в (13) достигаться не будет, однако можно утверждать, что если наибольшее абсолютное значение тригонометрической суммы будет L, то наибольшее абсолютное значение сопряженной суммы не может всегда оставаться менее, чем

$$\frac{L}{1.8519}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\,.$$

Это видно из следующего примера. Пусть дано

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sin \nu x; \tag{14}$$

известно, что

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sin \nu x \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1.8519 \ldots = L,$$

причем равенство имеет место для $x = \frac{\pi}{n+1}$ при $n \to \infty$. Сумма, сопряженная сумме (14), будет иметь вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \cos \nu x;$$

видно, что наибольшее значение этой суммы будет

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}, \text{ или } \frac{L}{1.8519} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}.$$

§ 3. Обобщение неравенства (10) на случай квази-периодических функций

Неравенство (10) можно обобщить на случай квази-периодических функций.

Теорема. Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (c_\nu \cos \beta_\nu x + d_\nu \sin \nu x) \tag{15}$$

есть квази-периодическая функция с вещественными коэффициентами, где $\beta_0 = 0$, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ суть положительные неубывающие числа. Если для всех вещественных значений x выполняется условие $|\varphi(x)| \leqslant L$, то для тех же значений x при $\alpha \geqslant 1$ имеет место неравенство

$$\sqrt{F^2(x) + G^2(x)} \leqslant \beta_n^\alpha L, \tag{16}$$

где

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu^\alpha (c_\nu \cos \beta_\nu x + d_\nu \sin \beta_\nu x), \tag{17}$$

$$G(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^\alpha (d_\nu \cos \beta_\nu x - c_\nu \sin \beta_\nu x). \tag{18}$$

Доказательство[1]. Допустим сначала, что $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ суть рациональные числа, т. е. что $\varphi(x)$ есть периодическая функция периода $2p\pi$, где p есть общий знаменатель чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

[1] Метод доказательства принадлежит С. Н. Бернштейну (Serge Bernstein, Leçon sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, стр. 103, Collection de Borel, Paris, 1926).

В этом случае

$$\beta_\nu = \frac{q_\nu}{p} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ суть целые числа. Сделав в (15), (17) и (18) замену переменных

$$x = py,$$

получим тригонометрические суммы вида:

$$\varphi(py) = \sum_{r=0}^{q_n} (c_r \cos ry + d_r \sin ry),$$

$$F(py) = \frac{1}{p^\alpha} \sum_{r=0}^{q_n} r^\alpha (c_r \cos ry + d_r \sin ry),$$

$$G(py) = \frac{1}{p^\alpha} \sum_{r=1}^{q_n} r^\alpha (d_r \cos ry - c_r \sin ry),$$

где для $r \neq q_\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots, n)$ $c_r = d_r = 0$. Так как эти суммы периода 2π, то для всех вещественных значений y

$$\sqrt{F^2(py) + G^2(py)} \leqslant \left(\frac{q_n}{p}\right)^\alpha L = \beta_n^\alpha L,$$

или

$$\sqrt{F^2(x) + G^2(x)} \leqslant \beta_n^\alpha L. \qquad (19)$$

Если $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ суть иррациональные числа, то при любом положительном ε всегда можно выбрать произвольно большее число p так, чтобы

$$|p\beta_\nu - q_\nu| < \frac{\varepsilon}{k\pi},$$

где q_ν—целое положительное число, а k представляет наибольшую из величин

$$\sum_{\nu=0}^{n} (|c_\nu| + |d_\nu|),$$

$$\frac{1}{8}\left\{\sum_{\nu=0}^{n} (\beta_\nu + \sigma)^\alpha (|c_\nu| + |d_\nu|)\right\}^2,$$

$$\frac{\alpha}{4\pi} \sum_{\nu=0}^{n} (\beta_\nu + \sigma)^\alpha (|c_\nu| + |d_\nu|) \cdot \sum_{\nu=0}^{n} (\beta_\nu + \sigma)^{\alpha-1} (|c_\nu| + |d_\nu|),$$

причем $\sigma \geqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}$.

Заменив в (15), (17) и (18) β_ν через $\frac{q_\nu}{p}$, получим тригонометрические суммы

$$\varphi_1(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(c_\nu \cos \frac{q_\nu}{p} x + d_\nu \sin \frac{q_\nu}{p} x\right),$$

$$F_1(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{q_\nu}{p}\right)^\alpha\left(c_\nu\cos\frac{q_\nu}{p}x+d_\nu\sin\frac{q_\nu}{p}x\right),$$

$$G_1(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{q_\nu}{p}\right)^\alpha\left(d_\nu\cos\frac{q_\nu}{p}x-c_\nu\sin\frac{q_\nu}{p}x\right),$$

которые будут периодические периода $2\pi p$.

Для $|x|\leqslant p\pi$ и очень малом ε будем иметь

$$|\varphi_1(x)-\varphi(x)|=2\left|\left(d_\nu\cos\frac{p\beta_\nu+q_\nu}{p}\frac{x}{2}-c_\nu\sin\frac{p\beta_\nu+q_\nu}{p}\frac{x}{2}\right)\sin\frac{p\beta_\nu-q_\nu}{p}\frac{x}{2}\right|<\varepsilon.$$

Следовательно $|\varphi_1(x)|<L+\varepsilon$, поэтому в силу неравенства (19) получаем

$$\sqrt{F_1^2(x)+G_1^2(x)}>\left(\frac{q_\nu}{p}\right)^\alpha(L+\varepsilon).$$

Покажем далее, что для $|x|\leqslant p\pi$ и малом ε справедливы неравенства

$$\left|\left[F_1(x)+F(x)\right]\left[F_1(x)-F(x)\right]\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{20}$$

$$\left|\left[G_1(x)+G(x)\right]\left[(G_1(x)-G(x)\right]\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{21}$$

Действительно, так как

$$\left(\frac{q_\nu}{p}\right)^\alpha=\beta_\nu^\alpha+\frac{\alpha\varepsilon_\nu}{2pk\pi}(\xi_\nu)^{\alpha-1},$$

где $|\varepsilon_\nu|\leqslant\varepsilon$ и ξ_ν—среднее между $\frac{q_\nu}{p}$ и $\frac{q_\nu}{p}+\frac{\varepsilon_\nu}{2pk\pi}$, то

$$\left|\left[F_1(x)+F(x)\right]\left[F_1(x)-F(x)\right]\right|=$$

$$=\left|\left[F_1(x)+F(x)\right]\sum_{\nu=0}^{n}\left\{2\beta_\nu^\alpha\left(d_\nu\cos\frac{p\beta_\nu+q_\nu}{p}\frac{x}{2}-c_\nu\sin\frac{p\beta_\nu+q_\nu}{p}\frac{x}{2}\right)\sin\frac{p\beta_\nu-q_\nu}{p}\frac{x}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\alpha\varepsilon_\nu}{2pk\pi}(\xi_\nu)^{\alpha-1}\left(c_\nu\cos\frac{q_\nu}{p}x+d_\nu\sin\frac{q_\nu}{p}x\right)\right\}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Доказательство неравенства (21) аналогично.

Теперь для $|x|\leqslant p\pi$ имеем

$$|F^2(x)+G_1^2(x)-F^2(x)-G^2(x)|<\varepsilon,$$

или

$$\sqrt{F^2(x)+G^2(x)}<\beta_n^\alpha L+\eta,$$

где η стремится к нулю вместе с ε.

Так как p может расти бесконечно, то для всех вещественных значений x

$$\sqrt{F^2(x)+G^2(x)}\leqslant\beta_n^\alpha L. \tag{16}$$

Неравенство (16) остается справедливым и в том случае, когда в сумме (15) β_0 будет отлично от нуля, ибо в этом случае вместо суммы (15) можно рассматривать сумму

$$\varphi_{11}(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} (c'_\nu \cos \beta'_\nu x + d'_\nu \sin \beta'_\nu x),$$

где

$$c'_0 = 0, \quad c'_{\nu+1} = c_\nu, \quad d'_{\nu+1} = d_\nu, \quad \beta'_0 = 0, \quad \beta'_{\nu+1} = \beta_\nu.$$

§ 4. Доказательство неравенства (III)

Если $0 \leqslant \alpha < 1$, то неравенство

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \nu^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right| \leqslant n^\alpha L$$

в общем случае не будет справедливым. Действительно, пусть

$$f(x,\ k) = \frac{1-8k}{16k} + \cos x + k \cos 2x, \tag{22}$$

где $k > \frac{1}{4}$ и не зависит от x. Тогда, как было уже указано,

$$|f(x,\ k)| \leqslant L = k + \frac{8k+1}{16k}.$$

Умножив члены суммы (22) соответственно на 0^α, 1^α, 2^α, будем иметь

$$|\cos x + 2^\alpha k \cos 2x| \leqslant 1 + 2^\alpha k = M.$$

При любом рассматриваемом значении α можно k выбрать достаточно большим, чтобы

$$M - 2^\alpha L = \frac{8k(2-2^\alpha) - 2^\alpha}{16\,k} > 0,$$

т. е. чтобы $M > 2^\alpha L$.

Теорема. Пусть $f(x)$ есть тригонометрическая сумма (1). Если функция $\varphi(\nu)$ целочисленного переменного ν для $\nu \geqslant 0$ является неотрицательной, неубывающей и удовлетворяет условию

$$\varphi(\nu) - 2\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu+2) \leqslant 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-2) \tag{23}$$
$$\varphi(0) = 0,$$

то для всех вещественных значений x имеет место неравенство

$$|F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi(\nu)(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)| \leqslant \left[\frac{L}{n}\varphi(n) + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} \varphi(n-\nu) \right]. \tag{24}$$

Доказательство. Докажем сперва, что при условии (23) справедливы неравенства

$$\varphi(n)+2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\cos\nu\frac{2k-1}{n}\pi\geqslant 0 \qquad k=1,2,\ldots,n \quad (25)$$

$$\varphi(n)+2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\cos\nu\frac{2k_1}{n}\pi\leqslant 0. \qquad k_1=1,2,\ldots(n-1), \quad (26)$$

В самом деле

$$\varphi(n)+2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\cos\nu\frac{2k-1}{n}\pi=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}[\varphi(n-\nu)-\varphi(n-\nu-1)]\frac{\sin(2\nu+1)\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}[\varphi(n-\nu)-\varphi(n-\nu-1)]\frac{\sin[2(n-\nu)-1]\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}[\varphi(\nu)-\varphi(\nu-1)]\frac{\sin(2\nu-1)\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}[2\varphi(\nu)-\varphi(\nu+1)-\varphi(\nu-1)]\left(\frac{\sin\nu\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2+$$

$$+[\varphi(n)-\varphi(n-1)]\left(\frac{\sin\frac{2k-1}{2}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right)^2\geqslant 0.$$

Точно так же

$$\varphi(n)+2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\cos\nu\frac{2k_1}{n}\pi=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}[\varphi(n-\nu)-\varphi(n-\nu-1)]\frac{\sin(2\nu+1)\frac{k_1\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}[\varphi(\nu-1)-\varphi(\nu)]\frac{\sin(2\nu-1)\frac{k_1\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-1}[\varphi(\nu+1)-2\varphi(\nu)+\varphi(\nu-1)]\left(\frac{\sin\nu\frac{k_1\pi}{n}}{\sin\frac{k_1\pi}{n}}\right)^2\leqslant 0.$$

Приведем следующую интерполяционную формулу, принадлежащую Szegö[1]: если $f(x)$ есть тригонометрическая сумма (1), то

$$F_1(x)\cos\beta - G_1\sin\beta =$$
$$= \frac{1}{n2}\sum_{p=1}^{2n}(-1)^p f(x+t_p)\left\{c_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu \cos \nu t_p + c_n \cos n\, t_p\right\},$$

где

$$F_1(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$$G_1(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_{n-\nu}(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x),$$

$c_0, c_1, \ldots, c_n$ суть любые вещественные числа, β также любое вещественное число и

$$t_p = p\frac{\pi}{n} - \frac{\beta}{n}. \qquad p = 1, 2, \ldots, 2n$$

Полагая в этой формуле $\beta = 0$, $c_\nu = \varphi(n-\nu)$ и принимая во внимание неравенства (25) и (26), будем иметь

$$|F(x)| \leqslant \frac{L}{2n}\left\{\left|\sum_{p=1}^{2n-1}(-1)^p\left[\varphi(n) + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\cos\nu\frac{p\pi}{n}\right]\right| + \varphi(n) +\right.$$
$$\left. + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\right\} = \frac{L}{2n}\left\{\left|\varphi(n) + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\varphi(n-\nu)\sum_{p=1}^{n}\cos(2p-1)\frac{\nu\pi}{n}\right] -\right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[\varphi(n-\nu)\sum_{p=1}^{n-1}\cos 2p\frac{\nu\pi}{n}\right]\right| + \varphi(n) + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\right\}.$$

Так как

$$\sum_{p=1}^{n}\cos(2p-1)\frac{\nu\pi}{n} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

$$\sum_{p=1}^{n-1}\cos 2p\frac{\nu\pi}{n} = -1, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, (n-1)$$

то

$$|F(x)| \leqslant \frac{L}{n}\left[\varphi(n) + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(n-\nu)\right]. \tag{27}$$

Полагая $\varphi(\nu) = \nu^\alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, получаем

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\nu^\alpha(a_\nu\cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)\right| \leqslant \frac{L}{n}\left[n^\alpha + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^\alpha\right];$$

[1] Szegö, цитированная работа, стр. 64.

при $\alpha = 1$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} \nu\,(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant nL,$$

что совпадает с результатом Szegö.

Дадим оценку выражения

$$\frac{n^\alpha + 2\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^\alpha}{n}$$

при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Применяя формулу суммирования Эйлера, имеем

$$\frac{n^\alpha + 2\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^\alpha}{n} = \frac{1}{n}\left\{\frac{2}{1+\alpha}n^{\alpha+1} - \frac{2}{1+\alpha} + \right.$$

$$\left. + 1 + \frac{\alpha}{6n^{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{360}\Theta\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}} - 1\right)\right\},$$

где $0 < \Theta < 1$. Так как при любом значении $n \geqslant 2$

$$-\frac{2}{1+\alpha} + 1 + \frac{\alpha}{6n^{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{360}\Theta\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\left(1 - \frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \leqslant 0,$$

то

$$\frac{n^\alpha + 2\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^\alpha}{n} \leqslant \frac{2n^\alpha}{1+\alpha}.$$

Следовательно при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} \nu^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right| \leqslant \frac{2n^\alpha L}{1+\alpha}. \tag{III}$$

Полагая в (III) $\alpha = 0$, можем написать

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b\nu \sin \nu x)\right| \leqslant 2L. \tag{28}$$

Равенство (28) имеет место для суммы

$$f(x) = (n+1) - \frac{(n+1)^2}{2} + 2\sum_{\nu=1}^{n}(n+1-\nu)\cos \nu x \tag{29}$$

при $n \to \infty$. В самом деле, так как наибольшее значение суммы

$$n \cos x + (n-1)\cos 2x + \ldots + \cos nx$$

равно $\frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}$, а наименьшее ее значение будет $-\frac{n+1}{2}$, то наибольшее абсолютное значение L суммы (29) будет равно $\frac{(n+1)^2}{2}$.

Если члены суммы (29) умножим соответственно на ν°, то получим

$$\left| F_1(x) = 2\sum_{\nu=1}^{n}(n+1-\nu)\cos\nu x \right| \leqslant (n+1)^2-(n+1)=M.$$

Так как

$$\frac{\operatorname{Max}|F_1(x)|}{\operatorname{Max}|f(x)|}=\frac{M}{L}=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{\frac{(n+1)^2}{2}}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right),$$

то при $n\to\infty$

$$M=2L.$$

Равенство в (III) имеет место при $\alpha=1$ и $\alpha=0$; при $0<\alpha<1$ вопрос о равенстве остается открытым. В качестве нижней границы наибольшего значения выражения

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\nu^{\alpha}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\right| \tag{30}$$

при $0<\alpha<1$ можно принять величину $n^{\alpha}L$, а если $0\leqslant\alpha<m=0.556$, где m есть положительный корень уравнения $\alpha^2+3\alpha-2=0$, то выражение (30) величину $n^{\alpha}L$ может превысить. Действительно, умножая члены суммы (29) соответственно на ν^{α}, имеем

$$\left|F_1(x)=2\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha}(n+1-\nu)\cos\nu x\right|\leqslant 2\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha}(n+1-\nu)=$$

$$=\frac{2(n+1)^{\alpha+2}}{(1+\alpha)(2+\alpha)}+H=M,$$

где H порядка $(n+1)^{\alpha+1}$, или

$$\frac{M}{L}=\frac{2\frac{(n+1)^{\alpha+2}}{(1+\alpha)(2+\alpha)}+H}{\frac{(n+1)^2}{2}}=\frac{2}{1+\alpha}\cdot\frac{2}{2+\alpha}n^{\alpha}+\varepsilon_n,$$

где ε_n стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Так как при $0\leqslant\alpha<m$ $\frac{2}{1+\alpha}\cdot\frac{2}{\alpha+2}>1$, то при очень больших значениях n

$$M=\frac{2}{1+\alpha}\cdot\frac{2}{2+\alpha}n^{\alpha}L>n^{\alpha}L.$$

Неравенство (III) легко обобщается для квази-периодических функций.

§ 5. Доказательство неравенства (IV)

Дадим оценку наибольшего значения выражения

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha}(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x)\right|$$

при $0\leqslant\alpha\leqslant1$ и при $n\to\infty$.

Напишем

$$\left\{\sum_{\nu=0}^{n} \nu^{\alpha} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right\} \cos \beta - \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha} (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)\right\} \sin \beta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \cos (nt + \beta) \left\{ n^{\alpha} + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)^{\alpha} \cos \nu t \right\} dt.$$

Полагая $\beta = \frac{\pi}{2}$, имеем

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha} (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) \right| \leqslant \frac{2L}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \sin nt \left(n^{\alpha} + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)^{\alpha} \cos \nu t\right) \right| dt. \quad (31)$$

Для оценки интеграла в неравенстве (31) оценим выражение

$$\left| n^{\alpha} + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)^{\alpha} \cos \nu t \right| \quad (32)$$

для $0 < \frac{t}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $n \to \infty$, а для этого докажем, что для $0 < \frac{t}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\left| S_{n-1}^{(\alpha)} = A_{n-1}^{(\alpha)} + 2 \sum_{\nu=1}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{(\alpha)} \cos \nu t \right| \leqslant \frac{p}{2^{\alpha} \sin^{\alpha+1} \frac{t}{2}}, \quad (33)$$

где $A_0^{(\alpha)}, A_1^{(\alpha)}, \ldots, A_{n-1}^{(\alpha)}$ суть коэффициенты разложения

$$\frac{1}{(1-u)^{\alpha+1}} = A_0^{(\alpha)} + A_1^{(\alpha)} u + \ldots + A_n^{(\alpha)} u^n + \ldots,$$

т. е.

$$A_k^{(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}{k!},$$

а p является наибольшей из величин $(1 + 2C_1)$ и C_2, причем

$$C_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{(n-1)!\, n^{\alpha}}$$

и

$$C_2 = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!\, n^{\alpha}}.$$

Докажем предварительно вместе с Fejer'ом[1], что если

$$Q_n^{(\alpha-1)} = A_0^{(\alpha-1)} + \ldots + A_n^{(\alpha-1)} u^n$$

является n-й частичной суммой ряда

$$\frac{1}{(1-u)^{\alpha}} = A_0^{(\alpha-1)} + \ldots + A_n^{(\alpha-1)} u^n + \ldots, \quad (34)$$

[1] Fejer, Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome, Mathemat. ZS, Bd. 24, 1925.

где

$$A_k^{(\alpha-1)}=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1)}{k!},$$

то для $|u|\leqslant 1$ и $u\neq 1$

$$|Q_n^{(\alpha-1)}|\leqslant\frac{p}{|1-u|^{\alpha}}.$$

Действительно, при $|u|\leqslant 1$

$$|Q_n^{(\alpha-1)}|\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^{(\alpha-1)}=C_2n^{\alpha};$$

поэтому, если $|1-u|\leqslant\frac{1}{n}$, то

$$|Q_n^{(\alpha-1)}|\leqslant\frac{C_2}{|1-u|^{\alpha}}. \tag{35}$$

Если $|1-u|>\frac{1}{n}$, то при $|u|\leqslant 1$ и $u\neq 1$

$$|Q_n^{(\alpha-1)}|\leqslant\frac{1+2C_1}{|1-u|^{\alpha}}.$$

В самом деле, так как $A_n^{(\alpha-1)}=\frac{C_1}{n^{1-\alpha}}$, то ряд (34) для всех значений $|u|<1$ сходится, поэтому

$$|Q_n^{(\alpha-1)}|\leqslant\frac{1}{|1-u|^{\alpha}}+|A_{n+1}^{(\alpha-1)}u^{n+1}+A_{n+2}^{(\alpha-1)}u^{n+2}+\ldots|,$$

но по лемме Абеля

$$|A_{n+1}^{(\alpha-1)}u^{n+1}+A_{n+2}^{(\alpha-1)}u^{n+2}+\ldots|<\frac{2C_1}{n^{1-\alpha}|1-u|}.$$

Следовательно, если $|1-u|>\frac{1}{n}$, то

$$|Q_n^{(\alpha-1)}|<\frac{1+2C_1}{|1-u|^{\alpha}}. \tag{36}$$

Так как ряд (34) сходится для всех значений $|u|=1$, исключая $u\neq 1$, то неравенство (36) по известной теореме Абеля будет справедливо для $|u|\leqslant 1$ и $u\neq 1$.

Объединяя неравенство (35) и (36), имеем

$$|Q_n^{(\alpha-1)}|\leqslant\frac{p}{|1-u|^{\alpha}}$$

для $|u|\leqslant 1$ и $u\neq 1$.

Перейдем к доказательству неравенств (33). Напишем

$$S_{n-1}^{(\alpha)}=\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{r=0}^{n-1}A_r^{(\alpha-1)}\sin(2n-1-2r)\frac{t}{2}.$$

Так как

$$\sum_{r=0}^{n-1}A_r^{(\alpha-1)}\sin(2n-1-2r)\frac{t}{2}=-I\sum_{r=0}^{n-1}A_r^{(\alpha-1)}u^{-\frac{2n-1-2r}{2}},\qquad u=e^{it}$$

то

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1} A_r^{(\alpha-1)} \sin(2n-1-2r)\frac{t}{2}\right| \leqslant \left|\sum_{r=0}^{n-1} A_r^{(\alpha-1)} u^{-\frac{2n-1-2r}{2}}\right| =$$

$$= \left| u^{\frac{2n-1}{2}} \sum_{r=0}^{n-1} A_r^{(\alpha-1)} u^{-\frac{2n-1-2r}{2}} \right| = |\,Q_n^{(\alpha-1)}\,| \leqslant \frac{p}{|1-u|^{\alpha}} = \frac{p}{2^{\alpha}\sin^{\alpha}\frac{t}{2}}$$

для $0<\frac{t}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$|\,S_{n-1}^{(\alpha)}| \leqslant \frac{p}{2^{\alpha}\sin^{\alpha+1}\frac{t}{2}}$$

для $0<\frac{t}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Теперь можем дать оценку выражения (32) при $n\to\infty$. Напишем

$$n^{\alpha}+2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^{\alpha}\cos\nu t - S_{n-1}^{(\alpha)}\frac{1}{B_{n-1}^{(\alpha)}} = 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{B_{n-1-\nu}^{(\alpha)}}{B_{n-1}^{(\alpha)}}\right)\nu^{\alpha}\cos\nu t,$$

где

$$B_k^{(\alpha)} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)}{k!\,(k+1)^{\alpha}}.$$

По лемме Абеля при $n\to\infty$ и для $0<\frac{t}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(1-\frac{B_{n-1-\nu}^{(\alpha)}}{B_{n-1}^{(\alpha)}}\right)\nu^{\alpha}\cos\nu t\right| \leqslant 2\left(1-\frac{1}{B_{n-1}^{(\alpha)}}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}+h_0,$$

где h_0 ограничено при любом значении n, следовательно для $0<\frac{t}{2}\leqslant$ $\leqslant\frac{\pi}{2}$, $n\to\infty$

$$\left|n^{\alpha}+2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^{\alpha}\cos\nu t\right| \leqslant \frac{p}{B_{n-1}^{(\alpha)}\,2^{\alpha}\sin^{\alpha+1}\frac{t}{2}} + 4\left(1-\frac{1}{B_{n-1}^{(\alpha)}}\right)\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}+h_0. \quad (37)$$

Перейдем к оценке интеграла в неравенстве (31). На основании (37) можем написать, что при $n\to\infty$

$$\int_0^{\pi}\left|\sin nt\left[n^{\alpha}+2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^{\alpha}\cos\nu t\right]\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left|\sin nt\left[n^{\alpha}+2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^{\alpha}\cos\nu t\right]\right|dt}_{I_1} + \frac{p}{2^{\alpha}B_{n-1}^{(\alpha)}}\underbrace{\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{15}}\frac{dt}{\sin^{\alpha+1}\frac{t}{2}}}_{I_2} +$$

$$+\frac{p}{2^{\alpha}B_{n-1}^{(\alpha)}}\underbrace{\int_{\frac{\pi}{15}}^{\pi}\frac{dt}{\sin^{\alpha+1}\frac{t}{2}}}_{I_3} + 4\left(1-\frac{1}{B_{n-1}^{(\alpha)}}\right)\underbrace{\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{dt}{\sin\frac{t}{2}}}_{I_4}+h_1.$$

Так как наименьший положительный корень функции

$$n^\alpha + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^\alpha \cos \nu t$$

не менее, чем $\frac{\pi}{n}$, то

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nt \left[n^\alpha + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^\alpha \cos \nu t \right] dt =$$

$$= \frac{2n^\alpha}{n} + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^{\alpha-1} + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(n-\nu)^\alpha}{n+\nu} - 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(n-\nu)^\alpha}{n+\nu}\sin^2\frac{\nu\pi}{2n} -$$

$$-2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^\alpha \sin^2\frac{\nu\pi}{2n}.$$

Пользуясь формулой суммирования Эйлера, будем иметь

$$2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^{\alpha-1} = \frac{2(n^\alpha-1)}{\alpha} + h_2$$

$$2\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(n-\nu)^\alpha}{n+\nu} = 2\int_1^{n-1}\frac{(n-x)^\alpha}{n+x}dx + h_3 = \frac{1}{n}\int_1^n \frac{t^\alpha}{1-\frac{t}{2n}}dt + h_4 =$$

$$= \frac{1}{n}\int_1^n \left(t^\alpha + \frac{t^{\alpha+1}}{2n} + \frac{t^{\alpha+2}}{2n(2n-t)}\right)dt + h_4 <$$

$$< \frac{1}{n}\int_1^n \left(t^\alpha + \frac{t^{\alpha+1}}{2n} + \frac{t^{\alpha+2}}{2n^2}\right)dt + h_4 = \frac{4\alpha^2+17\alpha+17}{2(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}n^\alpha + h_5.$$

$h_1, h_2, \ldots, h_5$, а также и последующие $h_6, \ldots, h_{16}$ ограничены при любом значении n.

$$2\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(n-\nu)^\alpha}{n+\nu}\sin^2\frac{\nu\pi}{2n} > \frac{2}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n-2}\frac{(n-\nu)^\alpha}{n+\nu}\nu^2 + \frac{2}{2n-1} =$$

$$= \frac{2}{n^2}\int_1^{n-1}\frac{(n-x)^\alpha x^2}{n+x}dx^2 + h_6 = \frac{2}{n^2}\int_1^n \frac{n^2t^\alpha - 2nt^{\alpha+1} + t^{\alpha+2}}{2n-t}dt + h_7 =$$

$$= \frac{1}{n^3}\int_1^n \frac{n^2t^\alpha - 2nt^{\alpha+1} + t^{\alpha+2}}{1-\frac{t}{2n}}dt + h_7 > \frac{1}{n^3}\int_1^n (n^2t^\alpha - 2nt^{1+\alpha} + t^{\alpha+2})\,dt + h_7 =$$

$$= \frac{2n^\alpha}{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} + h_8.$$

$$2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)^{\alpha-1}\sin^2\frac{\nu\pi}{2n} > \frac{2}{n^3}\int_1^{n-1}(n-x)^{\alpha-1}x^2\,dx + h_9 =$$

$$= \frac{2}{n^2}\int_1^{n-1} t^{\alpha-1}(n-t)^2\,dt + h_9 = \frac{2}{n^2}\int_1^n (t^{\alpha-1}n^2 - 2nt^\alpha + t^{\alpha+1})\,dt + h_{10} =$$

$$= \frac{2(n^\alpha-1)}{\alpha} - \frac{6+2\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}n^\alpha + h_{11}.$$

Итак,

$$I_1 < \frac{4\alpha^2 + 14\alpha + 26}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} n^\alpha + h_{12}.$$

Заметив, что для $0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{30}$ имеет место неравенство $\frac{\sin z}{z} > \frac{3}{\pi}$, получаем

$$I_2 = \frac{2p}{2^\alpha B_{n-1}^{(\alpha)}} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{30}} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} z}\, dz < \frac{2p\pi^{\alpha+1}}{2^\alpha B_{n-1}^{(\alpha)} 3^{\alpha+1}} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{30}} \frac{dz}{z^{\alpha+1}} = \frac{2p\pi}{B_{n-1}^{(\alpha)} 3^{\alpha+1}} \cdot \frac{(n^\alpha - 15^\alpha)}{\alpha}.$$

$$I_3 = \frac{2p\pi^{\alpha+1}}{2^\alpha B_{n-1}^{(\alpha)} 3^{\alpha+1}} \int\limits_{\frac{\pi}{30}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z^{\alpha+1}}\, dz + h_{13} = \frac{2p\pi}{B_{n-1}^{(\alpha)} 3^{\alpha+1}} \cdot \frac{15^{\alpha-1}}{\alpha} + h_{13}.$$

$$I_4 = 8\left(1 - \frac{1}{B_{n-1}^{(\alpha)}}\right) \ln n + h_{14}.$$

Докажем далее, что при $n \to \infty$, $1 + 2C_1 \geqslant C_2$ или $1 + 2C_1 - C_2 \geqslant 0$. Действительно, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}{(n-1)!\, n^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)},$$

$$\lim \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!\, n^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)},$$

то

$$1 + 2C_1 - C_2 = 1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} = \varphi(\alpha).$$

При $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$\varphi(\alpha) = 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) > 0.$$

Если $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, то

$$\varphi'(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\left(\frac{1}{\alpha} - 2\right) \sum_{n=1}^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha}(2 - C) + 2C\right],$$

где C—Эйлерова постоянная. Следовательно, на промежутке $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ функция $\varphi(\alpha)$ возрастающая, но $\varphi(0) = 0$, поэтому $\varphi(0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \geqslant 0$.

Заметив, что

$$\lim_{n\to\infty} B_{n-1}^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

можем написать, что при $n \to \infty$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \nu^\alpha (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) \right| < \qquad (38)$$

$$< \frac{2L}{\pi}\left(\frac{4\alpha^2 + 14\alpha + 26}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} n^\alpha + \frac{2\pi\left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\right)\Gamma(\alpha+1)}{3^{\alpha+1}} \frac{n^\alpha - 1}{\alpha} + 8[1 - \Gamma(\alpha+1)] \ln n \right).$$

Заметим, что наибольшее значение выражения (38) при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ не может всегда оставаться менее чем

$$\frac{L}{1.8519} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^{1-\alpha}} = \frac{L}{1.8519} \left(\frac{n^{\alpha}-1}{\alpha} + h_{16} \right).$$

Действительно, пусть

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sin \nu x,$$

тогда

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \cos \nu x.$$

Умножив члены $g(x)$ соответственно на ν^{α} будем иметь сумму

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1} \cos \nu x,$$

наибольшее значение которой будет

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1}.$$

Так как наибольшее абсолютное значение $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \sin \nu x$ при $n \to \infty$ равно $1.8519 = L$, то для $n \to \infty$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha-1} = \frac{L}{1.8519} \left(\frac{n^{\alpha-1}}{\alpha} + h_{16} \right).$$

§ 6. Доказательство неравенства (V)

Пусть $f(x)$ есть тригонометрическая сумма (1). Если функция $\varphi(\nu)$ целочисленного переменного ν для $\nu \geqslant 0$ неотрицательна, невозрастающая и удовлетворяет условию

$$\varphi(\nu) - 2\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu+2) \geqslant 0, \qquad \nu = 0, \ldots, (n-1) \qquad (39)$$

то имеет место неравенство

$$\left| F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi(\nu)(a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x) \right| \leqslant \varphi(0) L.$$

В самом деле

$$|F(x) - \varphi(n+1) f(x)| \leqslant \frac{L}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left| \left[\varphi(0) - \varphi(n+1) \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \left[\varphi(\nu) - \varphi(n+1) \right] \cos \nu t \right| dt,$$

но величины

$$\varphi(0)-\varphi(n+1),\quad \varphi(1)-\varphi(n+1),\ldots,\varphi(n)-\varphi(n+1)$$

в силу условия (39) удовлетворяют условиям (7) теоремы В, следовательно сумма, стоящая под знаком модуля, в предыдущем интеграле неотрицательна, поэтому

$$|F(x)-\varphi(n+1)f(x)|\leqslant\Big(\varphi(0)-\varphi(n+1)\Big)L,$$

или

$$|F(x)|\leqslant\varphi(0)L.$$

Полагая

$$\varphi(\nu)=\frac{1}{(\nu+1)^\alpha},$$

где $\alpha\geqslant 0$, имеем

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{(\nu+1)^\alpha}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x)\right|\leqslant L. \tag{V}$$

§ 7. Доказательство неравенств (VI) и (VIa)

Теорема. Пусть $f(x)$ есть тригонометрическая сумма (1). Если $\alpha\geqslant 1$, то

$$|G(x)|=\left|\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^\alpha}(b_\nu\cos\nu x-a_\nu\sin\nu x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4L}{\pi}\Big(1+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{5^{\alpha+1}}+\ldots+k\Big)=H,$$

где

$$k=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha+1}}, & \text{если } n \text{ четное}\\[2mm] \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}, & \text{если } n \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Доказательство. Напишем

$$G(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^\alpha}\sin\nu t\Big)dt,$$

так как для $0\leqslant t\leqslant\pi$

$$\sum_{p=1}^{\nu}\frac{1}{p}\sin pt\geqslant 0,$$

то для $0\leqslant t\leqslant\pi$ при $\alpha\geqslant 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^\alpha}\sin\nu t=\sum_{\nu=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{\nu^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\nu+1)^{\alpha-1}}\Big)\sum_{p=1}^{\nu}\frac{1}{p}\sin pt+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\sin pt\geqslant 0,$$

поэтому

$$|G(x)|\leqslant\frac{2L}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu^\alpha}\sin\nu t\,dt=\frac{4L}{\pi}\Big(1+\frac{1}{3^{\alpha+1}}+\frac{1}{5^{\alpha+1}}+\ldots+k\Big)=H. \tag{VI}$$

Легко показать, что при $n \to \infty$

$$|G(x)| \leqslant H \qquad \text{(VIa)}$$

и в том случае, когда $0 < \alpha \leqslant 1$. Докажем предварительно следующую теорему.

Теорема. Если коэффициенты суммы синусов

$$S_n^{(x)} = l_1 \sin x + l_2 \sin 2x + \ldots + l_n \sin nx$$

удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &l_\nu - 2l_{\nu+1} + l_{\nu+2} \geqslant 0, && \nu = 0,1, \ldots, (n-2) \\ &l_{n-1} - 2l_n \geqslant 0, \quad l_n \geqslant 0, && (40) \end{aligned}$$

то такая сумма неотрицательна для $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Доказательство. Докажем сначала, что для $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$\psi_n(x) = n \sin x + (n-1) \sin 2x + \ldots + \sin nx \geqslant 0.$$

В самом деле, если $n = 2k$, то

$$\psi_n(x) = Q_1 + Q_2 + \ldots + Qk,$$

где

$$Q_r = 2 \sum_{i=1}^{2r-1} \sin ix + \sin 2rx; \qquad r = 1, \ldots, k$$

если $n = 2k + 1$, то

$$\psi_n(x) = Q_1' + Q_2' + \ldots + Q_{k+1}',$$

где

$$Q_2' + 2 \sum_{i=1}^{2(r-1)} \sin ix + \sin (2r-1)x, \qquad r = 1, \ldots, (k+1)$$

но для $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$Q_r = 2 \sin^2 rx \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geqslant 0.$$

$$Q_r' = 2 \sin^2 (2r-1) \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geqslant 0.$$

Следовательно для $0 \leqslant x \leqslant \pi \quad \psi_n(x) \geqslant 0$.

Обозначая

$$\sigma_k = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx$$

будем иметь

$$S_n^{(x)} = (l_1 - l_2)\sigma_1 + (l_2 - l_3)\sigma_2 + \ldots + (l_{n-1} - l_n)\sigma_{n-1} + l_n \sigma_n,$$

так как

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots \sigma_k = \psi_k(x),$$

то для $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$S_n^{(x)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n-2} (l_\nu - 2l_{\nu+1} + l_{\nu+2})\psi_\nu(x) + (l_{n-1} - 2l_n)\psi_{n-1}(x) + l_n \psi_n(x) \geqslant 0.$$

Теперь можно перейти к доказательству неравенства (VIa). Напишем

$$G(x) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\nu^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) \sin \nu t \, dt.$$

Так как коэффициенты суммы синусов, стоящей со знаком интеграла, удовлетворяют условиям (40), то

$$\left| G(x) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} g(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4L}{\pi} \left[1 + \frac{1}{3^{\alpha+1}} + \ldots + k - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + k_1 \right) \right] = H_1,$$

где

$$k_1 = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{если } n \text{ четное} \\ \frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases}$$

или

$$G(x) \,| \leqslant H_1 + \frac{\max |g(x)|}{(n+1)^\alpha}.$$

При $n \to \infty$ и $\alpha > 0$

$$|G(x)| \leqslant \frac{4L}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^{\alpha+1}} + \ldots + k \right) = H. \tag{VIa}$$

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

G. SOKOLOV. SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DES SOMMES TRIGONOMETRIQUES

RÉSUMÉ

Soit

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

une somme trigonometrique, à coefficients réels, d'ordre n, qui satisfait à la condition $|f(x)|\leqslant L$, pour toutes les valeurs réelles de x. Szegö[1] a démontré le théorème suivant: si $f(x)$ est une somme (1), on a pour toutes les valeurs réelles de x

$$\sqrt{\{f'(x)\}^2+\{g'(x)\}^2}\leqslant nL,$$

où

$$g(x)=\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x).$$

De là

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\nu^\alpha(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right|\leqslant n^\alpha L,$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^\alpha(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)\right|\leqslant n^\alpha L.$$

où α est un nombre entier, positif.

S. Bernstein a posé le probleme de l'évaluation de la valeur maxima des expressions

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n}\nu^\alpha(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right|,$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\nu^\alpha(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x)\right|$$

pour α réel quelconque.

[1] Szegö, Über einen Satz des Herrn S. Bernstein, Schrift. d. Königsb. Gel. Ges., 1928, Heft 5, p. 62—63.

J'ai obtenu les résultats suivants:
Si $\alpha \geqslant 1$, on a pour toutes les valeurs de n

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \nu^{\alpha}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right| \leqslant n^{\alpha} L, \tag{I}$$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha}(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) \right| \leqslant n^{\alpha} L. \tag{II}$$

Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, on a pour toutes les valeurs de n

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \nu^{\alpha}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right| \leqslant \frac{2n^{\alpha} L}{1+\alpha} \tag{III}$$

et pour $n \to \infty$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha}(b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) \right| <$$

$$< \frac{2L}{\pi} \left[\frac{4\alpha^2 + 14\alpha + 26}{(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)} n^{\alpha} + \frac{2\pi \left(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\right) \Gamma(1+\alpha)}{3^{\alpha+1}} \frac{n^{\alpha} - 1}{\alpha} + \right.$$

$$\left. + 8 \left(1 - \Gamma(1+\alpha)\right) - l_n n \right]. \tag{IV}$$

Si $\alpha \geqslant 0$, on a pour toutes les valeurs de n

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{(\nu+1)^{\alpha}} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right| \leqslant L. \tag{V}$$

Si $\alpha \geqslant 1$, on a pour toutes les valeurs de n

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu^{\alpha}} (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) \right| \leqslant \frac{4L}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^{\alpha+1}} + \ldots + k\right) = H, \tag{VI}$$

où

$$k = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)^{\alpha+1}}, & \text{pour } n \text{ pair} \\ \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}, & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Si $0 < \alpha \leqslant 1$, $n \to \infty$, on a

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^{\alpha}} (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) \right| \leqslant H.$$

On peut généraliser les inégalités (I), (II), (III) au cas de fonctions quasi-périodiques.

Institut mathématique V. Stekloff
de l'Academie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

СУТОЧНАЯ СОЛНЕЧНАЯ ВОЛНА КОЛЕБАНИЙ ШИРОТЫ МЕСТА ПО РАЗНОСТЯМ ЗЕНИТНЫХ РАССТОЯНИЙ ЗВЕЗД ε КАССИОПЕИ И ДРАКОНА, НАБЛЮДЕННЫМ А. С. ВАСИЛЬЕВЫМ в 1918—1923 гг. в ПУЛКОВЕ

А. С. ВАСИЛЬЕВА и Н. И. ВАСИЛЬЕВОЙ

§ 1. Историческая справка. В результате настойчивого труда наблюдений, исследований и вычислений, начатого в конце 1907 г., продолжающегося и в настоящее время, нам (с 1910 г. в вычислениях постоянно сотрудничает Н. И. Васильева) удалось разгадать все—мы так думаем—многочисленные загадки пулковского пассажного инструмента в первом вертикале, накопившиеся с 1840 г. (инструмент построен Репсольдом, установлен в 1839 г., наблюдения начаты в 1840 г.).

После этого большой интерес представляет чтение прежних печатных работ, связанных с этим инструментом: все в этих работах теперь получает объяснение, все становится на свое место. Уже в предыдущей статье [1] мы показали, что еще в 1872 г. М. О. Нюрен подметил в наблюдениях В. Струве 1840—1842 гг. признаки кратковременных перемен широты, но не нашел для них правильного объяснения [2]. И в 1883 г. в L'Aberration des étoiles fixes на стр. 38 при изучении хода остаточных ошибок уже из своих собственных наблюдений Нюрен пишет: «Если бы допустить, что широта нашего инструмента испытывает малые временные перемены, то это объяснение было бы самым удовлетворительным. Против такого предположения было бы только одно возражение, что до сих пор подобные перемены даже с некоторой достоверностью не установлены. Можно еще допустить, что уклонения обязаны своим происхождением боковой рефракции...».

Теперь гипотезу какой-то боковой рефракции необходимо отбросить, так как мы показали, что сходные между собой закономерные суточные уклонения выявляются в наблюдениях не только пассажного инструмента в первом вертикале, но и зенит-телескопа.

Неудача Б. Ванаха [3] в определении значения аберрационной постоянной из его собственных наблюдений 1890, 32—1891, 44 г. на нашем же инструменте также получает теперь отчетливое объяснение.

Особенности своих наблюдений 1893—1895 гг. С. К. Костинский по-

[1] А. С. Васильев. Суточная солнечная волна колебаний широты по наблюдениям В. Струве 1840—1842 гг. в Пулкове.

[2] M. O. Nyren, Bestimmung der Nutation der Erdachse, 1872 г., стр. 34, 35, 38.

[3] B. Wanach, Beobachtungen am Pulkower Passageninstrument im ersten Vertikal in den Jahren 1890 und 1891, nebst Ableitung der Polhöhenänderung, стр. 166, archiv for Mathematik og Naturvidenskab, 1893 г., B. 16.

вторно [1] называет «аномалией в колебаниях широты», «местными уклонениями отвеса», «боковой рефракцией». Теперь несомненно, что эти «аномалии в широте» явились результатом расстройства одной из частей инструмента, бывшей в порядке у Ванаха все время и в начале после Ванаха.

Эта загадка мною была разгадана в 1908 г., и возможность ее повторения была тогда же до начала моих наблюдений устранена. Однако этот недосмотр и настойчивые приписывания до самого последнего времени [2] этого случая действию явлений природы—«аномалиям в широте», «боковой рефракции»—сильно усложнили не только работу нашу и нашего инструмента, но и вообще широтную работу. Мы думаем, что именно этот случай повлиял на исследования колебаний широты в мировом масштабе. Ведь пассажный инструмент из международных исследований колебаний широты изгнан совершенно.

Нам самим только с борьбою удалось отстоять наш пулковский идеально созданный инструмент: от полного разрушения, от переноса в музей, как «дурно построенный и неудачно поставленный»[3], и от переноса[4] на новое место, что скрыло бы следы прошлых исторических промахов, не говоря уже о том, было ли бы успешным освоение инструмента на новом месте. Вследствие в сущности этой исторической неудачи пассажного инструмента был создан в Пулкове зенит-телескоп[5].

Разрешению вопроса колебаний широты коротких периодов и «местных» колебаний широты служили и пулковские наблюдения на зенит-телескопе со времени его установки в 1904 г. и также параллельные с зенит-телескопом наблюдения 1905,0—1906,7 гг. на пассажном инструменте в первом вертикале. И. В. Бонсдорф в 1906 г. [6] и в 1910 г.[7], как и Кимура в 1903 г. [8], из наблюдений на зенит-телескопе пришел к заключению, что колебаний суточного периода или близкого к суткам в «движении полюса» не существует. Подобное же заключение о колебаниях короткого периода было опубликовано в 1913 г. Центральным бюро международной геодезической ассоциации за подписью Гельмерта, Альбрехта и Ванаха [9] вме-

[1] В 1907 г. в Mitteilungen der Nikolaï-Hauptsternwarte zu Pulkovo, № 17, стр. 65, 88—89, 91.

В 1931 г. в Bulletin de l'Observatoire Central à Poulkovo, vol. XII, № 4, стр. 31.

[2] См. Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове, № 109, 1931 г., стр. 31.

[3] О непонятных неувязках в результатах наблюдений см. Отчеты Пулковской обсерватории 1901—1902 гг., стр. 16; 1902—1904 гг., стр. 17, также в X томе Пулковских Publications, 1903 г. текст М. О. Нюрена и еще в Mitteilungen der Nikolaï-Hauptsternwarte zu Pulkovo, 1907 г., стр. 89 под строками в статье С. К. Костинского: «Положение зала наблюдений в I вертикале на юге здания особенно неблагоприятно».

[4] В 1910 г., настаивая на прекращении моих наблюдений, намеченных на четыре года, директор Обсерватории предложил мне осуществить перенос инструмента на новое место с принятием на себя на новом месте и наблюдений. В 1912 г. предложение было повторено. Ответом было, что до окончания обработки моих наблюдений для переноса инструмента оправданий нет. Удалось напечатать исследование: А. С. Васильев, 70 лет истории Пулковского пассажного инструмента в первом вертикале, 1912 г. в Изв. русск. астр. об-ва; §§ 1 и 12 посвящены вопросу о переносе инструмента.

[5] Отчет Пулковской обсерватории за 1902—1904 гг., стр. 17.

[6] Mitteilungen der Hauptsternwarte zu Pulkovo, № 13, стр. 16.

[7] Mitteilungen, № 33, стр. 197.

[8] Astr. Nachr., № 4041: « No systematic difference can exist between the four groups observations and the two groups observations for the international service».

[9] Astr. Nachr., № 4627.

сте со специальными исследованиями Ванаха[1] и Швейдефа[2] в Потсдаме, приводящими к тому же заключению. Это выступление Центрального бюро вызвано докладом Р. Шуманна на Гамбургской Международной геодезической конференции в 1912 г., получившего в своих исследованиях признаки существования кратковременных колебаний в широте места.

Здесь необходимо упомянуть еще о наблюдениях Боккарди с сотрудниками в Туринской обсерватории на пассажном инструменте в первом вертикале, начатых после нас, в 1912,9—1917,2 гг. и в 1919,5—1920,2 гг. [3]. Наше общее исследование этих наблюдений мы опубликовали в 1928 г.[4]. Из наблюдений 1919,5—1920,2 гг. Боккарди получил кратковременные колебания широты с амплитудой между 0″.12 и 0″.06 и с фазой, изменяющейся на один градус в 3 дня, а на полный круг приблизительно в 3 года[5].

§ 2. Наша задача исследований. Всем известно, какое высокое значение для астрометрии имеет отчетливое разрешение вышеперечисленных вопросов. Если кратковременные колебания широты действительно существуют, то ими было бы возможно объяснить и невязку годового замыкания при наблюдениях широты места цепным методом, и особенности в результатах определения значения аберрационной постоянной, и много других загадок. Все мои наблюдения и в их организации и в их выполнении и в 1908,6—1911,5 гг. и с 1917,2 г. до настоящего времени проведены с целью получения окончательных суждений по этим важным вопросам, не исключая конечно и колебаний широты периодов длительных.

Когда в конце 1907 г. я получил предложение «наладить на пассажном инструменте в первом вертикале в Пулкове наблюдения над колебаниями полюса», я на свое предположение выявлять одновременно и кратковременные колебания получил четкое утверждение директора Пулковской обсерватории, что никаких кратковременных колебаний в широте места не существует, что все попытки их получения будут тщетными.

Но допустим все-таки, что такие колебания в значениях широты существуют; какими эффектами должно сопровождаться их присутствие?

§ 3. Зенитные расстояния только одной звезды. Если в значениях широты на ряду с волнами периодов длинных $14^1/_2$-месячной, годовой и полугодовой, имеются волны: суточная и полусуточная, то всякое зенитное расстояние z, измеренное безразлично каким инструментом, например пулковским вертикальным кругом, будет давать уравнение

$$\varphi = \delta + z - a\cos(t - \nu) - b\cos(2t - \rho) - f + \lambda, \qquad (1)$$

где φ—широта места, свободная от колебаний, δ—склонение звезды, a—амплитуда суточного колебания, b—полусуточного; ν и ρ—фазы колебаний, f представляет совокупность волн длинных периодов, включая и те, которые возникают из несовершенного знания значений астрономических постоянных и параллакса звезды; t—специальное время волны, λ—случайная ошибка в наблюденном z зенитном расстоянии. Переходя к случаю реальному, предположим, что t дано в солнечном времени, т. е. это часовые углы

[1] Astr. Nachr., № 4627: «Auch hier zeigt sich also nichts von Teiner agesperiode angedeuted. Sollten also die Schlussfehler dennoch in täglicher Pohlhöhenschwankungen ihre Ursache haben, so müssten diese Schwankungen einer durchaus unregelmässigen Verlauf haben, ähnlich den meteorologischen Vorgängen».

[2] Astr. Nachr., № 4627.

[3] Annuario Astronomico pel 1923, publicato dal R. Osservatorio di Pino Torinese.

[4] Journal des observateurs, vol. VIII, № 6, 1925 г.

[5] А. С. Васильев, Нереальная оценка точности нивеллирований горизонтальной оси в пассажных инструментах, § 27, Изв. Акад. Наук СССР, ОФМ, 1928 г.

Солнца. В случае наблюдений в меридиане для звездного времени Θ имеем

$$\Theta = \alpha_* = t_\odot + \alpha_\odot. \quad (2)$$

Делая подстановку в (1), имеем

$$\varphi = \delta + z - a \cos(\alpha_* - \alpha_\odot - \nu) - b \cos(2\alpha_* - 2\alpha_\odot - \rho) - f - \lambda \quad (3)$$

или

$$\varphi = \delta + z - a \cos(\alpha_\odot + \nu - \alpha_*) - b \cos(2\alpha_\odot + \rho - 2\alpha_*) - f - \lambda. \quad (4)$$

Уравнения (3) или (4) показывают, что по зенитным расстояниям только одной звезды, например δ Кассиопеи, суточный член, даже если он существует, представится в виде волны годовой, а полусуточный — в виде полугодовой. Отсюда следует, что кривые колебаний широты, выводимые обособленно по различным звездам, будут получаться различными. И действительно, у Б. Ванаха из его наблюдений 1890,32—1891,44 гг. по звездам δ Кассиопеи, ε Б. Медведицы и ι Дракона обособленно получились кривые не вполне тождественные [1]. Этот же факт с еще большей отчетливостью выявлен Р. Шуманном [2] из наблюдений В. Струве 1840,30—1842,96 гг.: амплитуды и особенно фазы волн годовой и $14^1/_2$-месячной получили ясно выраженный ход по прямому восхождению. Это подробнее мною представлено в предыдущем исследовании [3].

Далее уравнение (1) показывает, что присутствие суточного члена должно отражаться в каталожной работе, именно в определениях фундаментальных склонений; следовательно оно отразится и на всей каталожной работе в целом. Значения склонений той же звезды, полученные из наблюдений при часовых углах Солнца, отличающихся на 12 часов, будут отличаться приблизительно на $2a \cos(t-\nu)$, а во всех вообще звездах суточный член войдет в значение склонения при наблюдении днем с обратным знаком, чем при наблюдении через полгода ночью. И действительно, факт разности «день—ночь» в зенитных расстояниях известен со времен Петерса и Гюльдена, и Гюльденом сформулирован с совершенной ясностью в V томе Пулковских Observations, 1873 г., на стр. 15.

Из уравнения (4) видно, что, изменяя α_* звезды, т. е. наблюдая в течение суток несколько звезд, суточный член определить было бы легко и просто, если бы были хорошо известны склонения. Но мы видим, что имеющиеся в каталогах склонения суточным членом искажены, а потому в нашем исследовании и склонения необходимо считать неизвестными.

При n наблюдаемых звездах неизвестных, подлежащих определению, следовательно будет $n+2$ (для суточного члена)$+2$ (для полусуточного члена). На основе наблюдений в течение только одних суток и даже многих суток, но близко расположенных, задача оказывается неразрешимой, но при расположении наблюдений так, чтобы $\alpha_\odot$ приняло самые различные значения, задача делается разрешимой.

Опыт такого решения мы успешно выполнили на наблюдениях В. Струве [1]. Суточная волна в колебаниях широты получилась отчетливой и далеко не малой, с амплитудой в 0′.13. Этим разность «день—ночь» $= 2a \cos(t-\nu)$ между двумя кульминациями одной и той же звезды дела-

[1] B. Wanach, Beobachtungen am Pulkowoer Passageninstrument im ersten Vertikal, стр. 171—179 и диаграммы I и II. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. 1893 г., B. 16.

[2] R. Schumann, Numerische Untersuchung über Polhöhenschwankung und Aberrationskonstante, Astronomische Abhandlungen zu d. Astr. Nachr., № 11, стр. 18—21.

[3] А. С. Васильев, Суточная солнечная волна колебаний широты места по наблюдениям 1840—1842 гг. В. Струве в Пулкове, § 10.

ется в максимуме равной 0″.26 и в каталожной работе становится несомненно заметной.

Предположение t в лунном времени приводит через посредство (2), (3) и (4) к заключению, что суточный лунный член в зенитных расстояниях одной только звезды будет выявляться в виде волны месячной, а полусуточный—в виде полумесячной. В остаточных ошибках наших наблюдений 1908,6—1911,5 гг. месячный период колебаний широты выявился [2]. Указывает ли это на присутствие суточного лунного члена? Разработка наших наблюдений 1908,6—1911,5 гг. и с 1917 г. по настоящий момент дает отчетливый ответ и на этот вопрос.

§ 4. Разность зенитных расстояний двух звезд. Если мы наблюдаем ежедневно две звезды, то имеем два типа уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \delta_i + z_i - a\cos(\alpha_i - \alpha'_{\odot} - \nu) - b\cos(2\alpha_i - 2\alpha'_{\odot} - \rho) - f - \lambda_i \\ \varphi &= \delta_k + z_k - a\cos(\alpha_k - \alpha''_{\odot} - \nu) - b\cos(2\alpha_k - 2\alpha''_{\odot} - \rho) - f - \lambda_k\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Когда наблюдения разделены малым промежутком времени, например не бо́льшим двух суток, тогда перемены в волнах длинных периодов останутся в пределах ошибок наблюдений.

В таком случае, вычитая первое в (5) из второго, мы имеем:

$$\begin{aligned}0 = \delta_k - \delta_i + z_k - z_i &+ 2a\sin\left(\frac{\alpha_k + \alpha_i}{2} - \frac{\alpha''_{\odot} + \alpha'_{\odot}}{2} - \nu\right)\sin\left(\frac{\alpha_k - \alpha_i}{2} - \frac{\alpha''_{\odot} - \alpha'_{\odot}}{2}\right) + \\ &+ 2b\sin[\alpha_k + \alpha_i - (\alpha''_{\odot} + \alpha'_{\odot}) - \rho]\sin[\alpha_k - \alpha_i - (\alpha''_{\odot} - \alpha'_{\odot})] + \\ &+ 2c\sin\left(\frac{\alpha_k + \alpha_i}{2} - \frac{\alpha''_{☾} + \alpha'_{☾}}{2} - \nu_{☾}\right)\sin\left(\frac{\alpha_k - \alpha_i}{2} - \frac{\alpha''_{☾} - \alpha'_{☾}}{2}\right) + \\ &+ 2d\sin(\alpha_k + \alpha_i - \alpha''_{☾} + \alpha'_{☾} - \rho_{☾})\sin[\alpha_k - \alpha_i - (\alpha''_{☾} - \alpha'_{☾})].\end{aligned} \qquad (6)$$

Члены с амплитудами $2c$ и $2d$ приписаны на случай, если в колебаниях широты существуют и лунные волны, суточная и полусуточная.

Уравнение (6) представляется нагляднее, если в нем сохранить часовые углы, как в (1), вместо прямых восхождений.

Обозначая соответственно каждое

$$\frac{t_k + t_i}{2} = T \quad \text{и} \quad \frac{t_k - t_i}{2} = \Delta, \qquad (7)$$

мы получаем

$$\begin{aligned}0 = \delta_k - \delta_i + z_k - z_i &+ 2a\sin(T_{\odot} - \nu_{\odot})\sin\Delta_{\odot} + 2b\sin(2T_{\odot} - \rho_{\odot})\sin 2\Delta_{\odot} + \\ &+ 2c\sin(T_{☾} - \nu_{☾})\sin\Delta_{☾} + 2d\sin(2T_{☾} - \rho_{☾})\sin 2\Delta_{☾}.\end{aligned} \qquad (8)$$

Из (6) и (8) видим, что в разностях зенитных расстояний $z_k - z_i$ волны суточную и полусуточную можно получить или менее заметными—до

[1] А. С. Васильев, Суточная солнечная волна колебаний широты места по наблюдениям 1840—1842 гг. В. Струве в Пулкове.

[2] А. С. Васильев, Месячный период в колебаниях широты места, Известия Акад. Наук, СССР, 1918 г., № 7.

исчезновения—или более заметными—до удвоенной амплитуды,—стоит только надлежаще подобрать прямые восхождения наблюдаемых звезд.

При $2\Delta = \alpha_k - \alpha_i - (\alpha'' - \alpha') = 12$ ч. исчезает влияние на разность полусуточного члена и удваивается амплитуда суточного. При $2\Delta = \alpha_k - \alpha_i - (\alpha'' - \alpha') = 6$ ч. удваивается амплитуда волны полусуточной. Разность $\alpha'' - \alpha'$ близка к нулю. Влияние волн длинных периодов совершенно отсутствует. Звезды для наблюдений следует выбирать поярче для того, чтобы иметь возможность получить уравнения при самых разнообразных значениях $\alpha_{\odot}$ прямого восхождения Солнца.

Количество неизвестных, подлежащих определению по разностям зенитных расстояний двух звезд, равно 1 (для разности склонений) $+2$ (для суточного члена) $+2$ (для полусуточного члена) $=5$.

Этот метод позволяет выявлять и подробности явления.

Из уравнений (6) и (8) заключаем еще, что средняя ошибка одного наблюдения, вычисляемая à posteriori, т. е. по уже имеющимся зенитным расстояниям, будет получаться по размерам различной в зависимости от организации вычислений. При вычислении по разностям между смежными наблюдениями одной и той же звезды средняя ошибка получится наименьшей. При сопоставлении разности зенитных расстояний звезд различных точность наблюдений может показаться наихудшей. Так это в действительности и оказывается.

Искажение разности $z_k - z_i$ годовой волной, возникающей из волны суточной,

исчезает при $T = \nu$ и при $T = \nu + 12$ ч.
достигает максимума » $T = \nu + 6$ ч.
» минимума » $T = \nu - 6$ ч.

§ 5. **Одновременное определение разностей склонений звезд, амплитуд закономерных кратковременных колебаний и их фаз.** Приведем уравнения (8) к виду, удобному для решений по способу наименьших квадратов. Заменив в нем синусы разности разностью произведений синусов и косинусов и положив с соответствующими для Солнца и Луны значками

$$\begin{matrix} +2a\sin\Delta\cos\nu = y \\ -2a\sin\Delta\sin\nu = z, \end{matrix} \quad \text{откуда} \quad \begin{matrix} \operatorname{tg}\nu = \dfrac{-z}{y} \\ 4a^2\sin^2\Delta = y^2 + z^2 \end{matrix} \tag{9}$$

и также

$$\begin{matrix} +2b\sin 2\Delta\cos\rho = u \\ -2b\sin 2\Delta\sin\rho = v \end{matrix}, \quad \text{откуда} \quad \begin{matrix} \operatorname{tg}\rho = \dfrac{-v}{u} \\ 4b^2\sin^2\Delta = u^2 + v^2 \end{matrix} \tag{10}$$

и еще

$$\delta_k - \delta_i = x_{ki}, \tag{11}$$

мы получаем уравнение

$$\begin{gathered} x_{ki} + y_{\odot}\sin T_{\odot} + z_{\odot}\cos T_{\odot} + u_{\odot}\sin 2T_{\odot} + v_{\odot}\cos 2T_{\odot} + \\ + y_{☾}\sin T_{☾} + z_{☾}\cos T_{☾} + u_{☾}\sin 2T_{☾} + v_{☾}\cos 2T_{☾} = z_i - z_k + \lambda, \end{gathered} \tag{12}$$

где λ—остаточная ошибка уравнения.

При m наблюдавшихся звездах во всем полном решении задачи количество уравнений равно количеству всех получившихся разностей $z_\iota - z_k$, число же неизвестных равно $m-1+8$. При этом одну звезду, больше всего раз наблюдавшуюся, принимаем за основную, например β Кассиопеи. В таком случае разности типа $z_k - z_\iota$ заменяем двумя разностями, отнесенными к звезде основной:

$$z_k - z_\iota = z_k - z_\beta - (z_\iota - z_\beta). \tag{13}$$

При желании получить амплитуды и фазы колебаний еще более коротких, в $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ суток и т. д., следует вписать в уравнение (12) дальнейшие неизвестные. Закон приспособления уравнения (12) к такому решению совершенно ясен.

§ 6. Организация решения поставленной задачи. Если бы удалось доказать, что кратковременные закономерные колебания существуют, то ими было бы возможно объяснить многие неувязки не только в вопросах колебания широт, но и вообще в астрометрии. В настоящем исследовании мы ставим целью выявление суточных колебаний широты методом, совершенно исключающим влияние колебаний периодов длительных. Из уравнения (8) видим, что для этого наиболее подходили бы наблюдавшиеся нами звезды β Кассиопеи и 74 или 76 Б. Медведицы. Для этих звезд $\sin\Delta_\odot = 1$, а $\sin 2\Delta_\odot = 0$. Однако вследствие сравнительно слабой яркости звезд 74 и 76 Б. Медведицы прямое восхождение Солнца $\alpha_\odot$ не может в (8) или в (6) получить всевозможные значения. Не решаясь рисковать затратой вычислительного труда для получения вывода, недостаточно может быть совершенного, мы предпочли использовать наши наблюдения β Кассиопеи и ι Дракона за 1918—1928 гг. Для этих двух звезд

$$\alpha_\iota - \alpha_\beta = 15 \text{ ч. } 17 \text{ мин.}$$

и потому приблизительно

$$\sin\Delta_\odot = 0.91, \quad \sin 2\Delta_\odot = 0.75, \quad \sin\Delta_☾ = 0.96, \quad \sin 2\Delta_☾ = 0.54.$$

Это очень малая часть громадного материала, нами собранного в наших наблюдениях. При построении общей кривой колебаний широты и для наблюдений 1908,6—1911,5 гг. и для 1917,2—1929,5 гг. мы систему склонений звезд выработали, совсем не пользуясь значениями звездных каталогов. Мы исходили из наших собственных наблюдений, составляя разности во всех сочетаниях по два зенитных расстояния, наблюденных в промежутке времени, не большем двух суток. У нас получились многочисленные ряды таких разностей, и только один из этих рядов, ряд $z_\beta - z_\iota$, мы здесь используем.

Самое уравнение (8) мы берем в упрощенном виде, только с волною суточной солнечной:

$$0 = \delta_\iota - \delta_\beta + z_\iota - z_\beta + 2a \sin(T_\odot - \nu_\odot)\sin\Delta_\odot \tag{14}$$

или в виде

$$x_{\iota\beta} + y \sin T + z \cos T = z_\beta - z_\iota + \lambda. \tag{15}$$

Работу вычисления сорганизовываем так, чтобы выполненные по этому пути вычисления шли впрок и тогда, когда представится необходимость и возможность количество неизвестных в решении задачи увеличить.

Чтобы получить хотя некоторое суждение о свойствах определяемого здесь суточного члена и о свойствах неизвестного x, перемена значений которого, как разности склонений, представляет для нас также высокий интерес, хотя и не в настоящем исследовании, мы решение задачи проводим сначала по отдельным годам и потом решаем задачу повторно в целом за все время 1918—1928 гг.

§ 7. Значение разности склонений. В целях упрощения вычислений решения мы вводим вместо неизвестного $x_{\iota\beta}$ новое неизвестное x', связанное с ним уравнением

$$x_{\iota\beta} = \delta_{\iota} - \delta_{\beta} = + 29'31''.56 + x'. \tag{16}$$

Значение $\delta_{\iota} - \delta_{\beta} = 29'31''.56 \pm 0''.018$ есть среднее, получившееся из всех 402 разностей зенитных расстояний β Кассиопеи и ι Дракона, как описано выше, за время 1918—1929,5 гг. При этом выводе оказалось:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Средняя ошибка одной разности} & = \pm 0''.364 \\ \text{» \quad » \quad одного наблюдения} & = \pm 0.258 \end{array}\right\} \tag{17}$$

Значение этой самой разности склонений у нас получилось еще и при выработке нами системы склонений всех наших 26 звезд с помощью решения системы 208 уравнений типа (8) и (13) с 25 неизвестными из совокупности всех 1 849 нами произведенных наблюдений в 1918—1929,5 гг. При этом выводе, совсем отличающемся от предыдущего и по методу и по количеству охваченных наблюдений, оказалось:

$$x_{\iota\beta} = 29'31''.573 \pm 0''.011. \tag{18}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Средняя ошибка одной разности (всякой)} & = \pm 0''.363 \\ \text{» \quad » \quad одного наблюдения} & = \pm 0.257 \end{array} \tag{19}$$

Сходство чисел в (16) и (18), в (17) и (19) доказывает реальность этих выводов и кроме того подтверждает удивительное постоянство качества работы инструмента, на что мы уже многократно указывали в наших печатных работах[1]. Эти средние ошибки в (17) и (19) понадобятся нам в дальнейшем. Так как они в обоих случаях получены по разностям зенитных расстояний различных звезд, то понятно, что они по размерам выше действительности, если только суточная солнечная волна в колебаниях широты реально существует.

§ 8. Расположение нижеследующих таблиц. Выводы, получающиеся в результате решения этой нашей задачи—выявления суточной солнечной волны,—имеют по нашему мнению очень высокую важность. Отсюда вытекает большой интерес сравнивать подневно наши нижевыписанные уравнения и их остаточные ошибки с наблюдениями другими:

1) с нашими по другим звездам или

2) с наблюдениями других наблюдателей, например на вертикальном круге, на зенит-телескопе в Пулкове или вне Пулкова,

3) сравнивать с различными местами общей кривой колебаний ши-

[1] А. С. Васильев, Зенитные расстояния, получаемые на пулковском пассажном инструменте в первом вертикале, §§ 19 и 20, Изв. Акад. Наук СССР, 1932 г., стр. 173—202.

роты. В этих видах даты уравнений нами показаны в днях месяца и в долях тропического года.

В нижеследующих таблицах представлены наши уравнения, подлежащие разрешению. Надписи над столбцами применительно к уравнению (14) показывают значение чисел.

В столбце 6 значения l представляют уклонения отдельных разностей $Z_\beta—Z_\iota$ от их среднего (16), а подлинные разности мы помещаем в столбце 9. Разности $H—B_1$ и $H—B_2$ означают «наблюдение—вычисление», т. е. остаточные ошибки величин l или $Z_\beta—Z_\iota$, получившиеся в результате подстановки в уравнения выводов: 1) за каждый год отдельно,—это $H—B_1$—и 2) за все время 1918—1928 гг.,—это $H—B_2$. Сравнение $H—B_1$ с $H—B_2$ дает возможность судить, имеем ли мы дело с систематическими влияниями или со случайными ошибками отдельных наблюдений.

§ 9. Наблюдения 1918—1919 гг. В 1918—1919 гг. нами получено зенитных расстояний всего 281. В этом ряду для звезд β Кассиопеи и ι Дракона оказывается всего 41 разность зенитных расстояний, разделенных промежутком времени, не большим двух суток. Для этих 41 разности мы составили по типу уравнений (14), как описано выше, 41 уравнение ошибок и выполнили их решение по способу наименьших квадратов. От соединения в группы отдельных разностей или уравнений, близко расположенных во времени, для сокращения вычислений мы воздержались, так как всякая такая группировка привнесла бы нарушение реального распределения данных и этим исказила бы выводы.

В виду высокой важности и новизны наших выводов изложение с необходимой четкостью подробностей решения уравнений приобретает особое значение, такое изложение мы и выполняем.

Таблица 1

Уравнения ошибок 1918—1919 гг.

Дата	$T_\odot$	Коэффициенты			l	$H—B_1$	$H—B_2$	$Z_\beta—Z_\iota$	Дата
		x	y	z					
1918					″	″	″	+29′	
IV 9	6ч 35м	1	+0.988	−0.152	−0.36	−0.58	−0.16	31.″20	1918.270
15	6 12	1	+ .999	− .052	− .07	− .14	+ .14	31.49	.287
16	6 7	1	+1.000	− .022	+ .10	+ .07	+ .31	31.66	.290
V 11	4 32	1	+ .930	+ .366	− .03	+ .31	+ .18	31.53	.359
12	4 30	1	+ .924	+ .383	− .55	− .19	− .34	31.01	.362
12	4 28	1	+ .917	+ .399	+ .05	+ .41	+ .25	31.61	.363
13	4 26	1	+ .910	+ .415	+ .39	+ .76	+ .59	31.95	.364
1919									
V 1—2	5 13	1	+ .893	+ .450	− .08	+ .31	+ .12	31.48	1919.332
1—2	5 2	1	+ .870	+ .492	− .09	+ .31	+ .11	31.47	.336
23	3 51	1	+ .846	+ .534	− .40	+ .01	− .21	31.16	.388
23	3 47	1	+ .836	+ .548	− .82	− .41	− .63	30.74	.392
VI 11	2 34	1	+ .636	+ .772	− .34	.00	− .20	31.22	.440
11—12	2 26	1	+ .577	+ .817	− .39	− .10	− .27	31.17	.444
12—13	2 21	1	+ .577	+ .817	− .24	+ .05	− .12	31.32	.446
13	2 19	1	+ .563	+ .827	− .64	− .38	− .52	30.92	.448
19—20	1 52	1	+ .469	+ .883	− .33	− .15	− .23	31.23	.465
20—21	1 48	1	+ .454	+ .891	− .56	− .40	− .47	31.00	.468
20—21	1 44	1	+ .438	+ .899	− .46	− .32	− .37	31.10	.469

Таблица 1 (продолжение)

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты			l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_\beta - Z_n$	Дата
		x	y	z					
1919					″	″	″	+30′	
VII 2—3	$0^ч$ $58^м$	1	+0.250	+0.968	+0.05	—0.06	+0.09	31″.61	1919.500
3	0 54	1	+ .233	+ .972	+ .20	+ .07	+ .23	3 1.76	.504
3—4	0 58	1	+ .250	+ .968	— .19	— .30	+ .15	3 1.37	.502
3—4	0 54	1	+ .233	+ .972	— .04	— .17	+ .01	3 1.52	.505
7—8	0 38	1	+ .165	+ .986	+ .19	— .05	+ .20	3 1.75	.514
8—9	0 34	1	+ .148	+ .989	+ .35	+ .08	+ .36	3 1.91	.518
9	0 34	1	+ .148	+ .989	+ .21	— .06	+ .22	3 1.77	.518
9—10	0 30	1	+ .131	+ .991	+ .33	+ .04	+ .33	3 1.89	.518
9	0 30	1	+ .131	+ .991	+ .19	— .10	+ .19	3 1.75	.520
9	0 34	1	+ .148	+ .989	+ .38	+ .11	+ .39	3 1.94	.520
9	0 30	1	+ .131	+ .991	+ .36	+ .07	+ .36	3 1.92	.521
10	0 25	1	+ .109	+ .994	+ .35	+ .02	+ .35	3 1.91	.522
9—10	0 25	1	+ .109	+ .994	+ .18	— .15	+ .18	3 1.74	.521
13	0 17	1	+ .074	+ .997	+ .57	+ .18	+ .56	3 2.13	.531
14	0 9	1	+ .039	+ .999	+ .78	+ .33	+ .76	3 2.34	.534
21—22	23 41	1	— .083	+ .997	+ .71	+ .04	+ .65	3 2.27	.554
22	23 37	1	— .100	+ .995	+ .56	— .15	+ .50	3 2.12	.556
22—23	23 41	1	— .083	+ .997	+1.17	+ .50	+1.11	3 2.73	.556
23	23 37	1	— .100	+ .995	+1.02	+ .31	+ .96	3 2.58	.557
23	23 33	1	— .118	+ .993	+ .34	— .40	+ .27	3 1.90	.557
23	23 33	1	— .118	+ .993	+ .80	+ .06	+ .73	3 2.36	.558
23—24	23 29	1	— .135	+ .991	+ .58	— .19	+ .50	3 2.14	.558
23—24	23 29	1	— .135	+ .991	+ .04	+ .27	+ .92	3 2.60	.560
		41			+10.90	+4.31	+11.72		
					— 5.65	—4.30	— 3.52		
		Сумма квадратов:			10.0091	3.0165	8.2786		

Нормальные уравнения

	s
$41.0000\,x + 32.0090\,z + 15.2540\,y = 5.3100$	93.5730
$29.1538\,z + 7.4563\,y = 6.8299$	75.4492
$11.8428\,y = -3.4338$	31.1191

Решение нормальных уравнений дает:

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных	+1.8054	—1.2862	—1.8056			
Обратные веса Q	1.2066	1.0533	0.7111	—11.0522	—8.5825	+7.6042

Обратные веса неизвестных и Q_{xz}, Q_{xy}, Q_{zy} сообщаем на случай вычисления средних ошибок выводов.

Для суммы квадратов остаточных ошибок имеем:

$[\lambda\lambda] = 10.0091 - 9.5868 + 8.7844 - 6.2002 = 3.0065$ по формуле
$= 3.0165$ после подстановки в уравнения

Отсюда средняя ошибка после вычисления:

одного уравнения $\sqrt{\dfrac{[\lambda\lambda]}{n-3}} = \pm 0''.282$

» наблюдения $= \pm 0''.200$

§ 10. Наблюдения 1920 г. В 1920 г. было получено всего 171 зенитное расстояние. В этом ряду оказывается всего 56 разностей зенитных расстояний β Кассиопеи и ι Дракона, разделенных промежутком времени, не большим двух суток. Соответственно этим разностям, как описано выше, для определения суточной солнечной волны колебаний широты мы имеем 56 уравнений ошибок.

Таблица 2

Уравнения ошибок 1920 г.

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты			l	$H—B_1$	$H—B_2$	$Z_{\beta}—Z_{\iota}$	Дата
		x	y	z					
1920					″	″	″	+ 29′ ″	
III 14—15	$8^ч\ 4^м$	1	+ 0.857	— 0.515	—0.70	—0.22	—0.55	30.86	1920.203
15—16	8 0	1	+ .866	— .500	— .73	— .24	— .58	30.83	.204
23—24	7 31	1	+ .922	— .387	— .31	+ .21	— .14	31.25	.226
24—25	7 27	1	+ .929	— .371	— .15	+ .37	+ .02	31.41	.228
24—25	7 31	1	+ .922	— .387	— .22	+ .30	— .05	31.34	.228
24—25	7 27	1	+ .929	— .371	— . 6	+ .46	+ .12	31.50	.230
25—26	7 24	1	+ .934	— .358	— . 6	+ .46	+ .12	31.50	.232
25—26	7 27	1	+ .929	— .371	— .34	+ .18	— .16	31.22	.232
25—26	7 24	1	+ .934	— .358	— .34	+ .18	— .16	31.22	.233
25—26	7 20	1	+ .940	— .342	— .40	+ .12	— .22	31.16	.233
26—27	7 20	1	+ .940	— .342	— .68	— .16	— .50	30.88	.234
27—28	7 20	1	+ .940	— .342	— .55	— .03	— .37	31.01	.237
28—29	7 13	1	+ .950	— .313	— .33	+ .20	— .14	31.23	.240
28—29	7 20	1	+ .940	— .342	—1.04	— .52	— .86	30.52	.238
28—29	7 13	1	+ .950	— .313	— .82	— .29	— .64	30.74	.241
28—29	7 9	1	+ .955	— .297	— .46	+ .07	— .27	31.10	.241
29	7 9	1	+ .955	— .297	— .95	— .42	— .76	30.61	.242
30—31	7 9	1	+ .955	— .297	— .85	— .32	— .66	30.71	.246
VI 10	2 29	1	+ .605	+ .796	— .92	— .59	— .79	30.64	.442
15—16	2 6	1	+ .523	+ .853	— .52	— .13	— .41	31.04	.457
15—16	2 10	1	+ .537	+ .843	+ .36	+ .76	+ .48	31.92	.456
16—17	2 6	1	+ .523	+ .853	— .77	— .38	— .66	30.79	.458
17—18	1 57	1	+ .489	+ .872	— .65	— .27	— .55	30.91	.462
17—18	1 57	1	+ .489	+ .872	— .90	— .52	— .80	30.66	.463
18	1 57	1	+ .489	+ .872	— .07	— .69	— .97	30.49	.464
18—19	1 57	1	+ .489	+ .872	— .33	+ .05	— .23	31.23	.466
19—20	1 57	1	+ .489	+ .872	— .56	— .18	— .46	31.00	.467
21—22	1 37	1	+ .411	+ .912	— .44	— .09	— .36	31.12	.472
22	1 37	1	+ .411	+ .912	— .66	— .31	— .58	30.90	.476
22	1 37	1	+ .411	+ .912	— .34	+ .01	— .26	31.22	.477
28—29	1 12	1	+ .309	+ .951	+ .71	+1.01	+ .76	31.27	.493
29—30	1 3	1	+ .271	+ .962	+ .12	+ .41	+ .16	31.68	.496
30—1	0 59	1	+ .255	+ .967	— .05	+ .23	— .01	31.51	.497
VII 7—8	0 31	1	+ .135	+ .991	+ .22	+ .45	+ .22	31.78	.518
8	0 31	1	+ .135	+ .991	— .13	+ .10	— .13	31.43	.520
8—9	0 31	1	+ .135	+ .991	+ .06	+ .29	+ .06	31.62	.520

Таблица 2 (продолжение)

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты x	y	z	l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_{\beta}'-Z_t$	Дата
1920					"	"	"	+29′ "	
VII 9	0ч 26м	1	+0.113	+0.994	+1.09	+1.31	+0.09	31.65	1920.520
9	0 26	1	+ .113	+ .994	+ .28	+ .50	+ .28	31.84	.522
9—10	0 22	1	+ .096	+ .995	— .13	+ .08	— .14	31.43	.523
10—11	0 26	1	+ .113	+ .994	— .32	— .10	— .32	31.24	.524
10—11	0 22	1	+ .096	+ .995	— .73	— .52	— .74	30.83	.526
12—11	0 14	1	+ .061	+ .998	— .49	— .29	— .51	31.07	.528
13—14	0 14	1	+ .061	+ .998	—0.59	— .39	— .61	30.97	.532
15—16	23 58	1	— .009	+ .000	— .47	— .30	— .51	31.09	.538
VIII 10	22 20	1	— .423	+ .906	+ .30	+ .20	+ .14	31.86	.610
IX 1	21 1	1	— .704	+ .710	+ .74	+ .60	+ .49	32.30	.670
21—22	19 51	1	— .885	+ .466	+ .30	+ .07	— .02	31.86	.724
22	19 46	1	— .895	+ .446	+ .06	— .17	— .26	31.62	.728
22—23	19 46	1	— .895	+ .446	+ .01	— .22	— .31	31.57	.728
23—24	19 46	1	— .895	+ .446	+ .04	— .19	— .28	31.60	.731
24—25	19 40	1	— .906	+ .423	+ .01	— .23	— .31	31.57	.734
25	19 33	1	— .919	+ .395	+ .18	— .06	— .15	31.74	.736
26—27	19 33	1	— .919	+ .395	+ .24	00	— .09	31.80	.738
27—28	19 25	1	— .932	+ .362	+ .35	+ .10	+ .02	31.91	.742
28	19 25	1	— .932	+ .362	+ .25	00	— .08	31.81	.744
X 19	18 8	1	— .999	+ .035	+ .20	— .09	— .17	31.76	.802
		56			+4.52	+7.72	+2.96		
					—19.06	—7.83	—16.77		

Сумма квадратов: 14.6224 6.6213 10.5565

Нормальные уравнения

$$56.0000\,x + 23.1510z + 14.1930y = -14.5400 \qquad 78.8040$$
$$28.0492z - 3.4082y = -2.7635 \qquad 45.0285$$
$$27.9561y = -13.7576 \qquad 24.9838$$

Решение нормальных уравнений дает:

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных.	—0.1348	—0.0393	—0.4285			
Обратные веса	0.0379	0.0669	0.0508	—0.3412	0.2340	0.2548

Для суммы квадратов остаточных ошибок имеем:

$[\lambda\lambda] = 14.6224 - 1.9597 - 0.1087 - 5.8949 \;\; = 6.6591$ по формуле

$= 6.6213$ из уравнений

Отсюда средняя ошибка:

одного уравнения $\sqrt{\frac{6.6402}{56-3}} = \pm\, 0''.335$

» наблюдения $= \pm\, 0.237.$

§ 11. Наблюдения 1924 г. Другие поручения, возложенные на нас Обсерваторией в 1920—1924 гг. (руководство занятиями военных и морских геодезистов, прикомандированных к Обсерватории, 24 человека), позволили нам в 1921, 1922 и 1923 гг. получить только соответственно 47, 24 и 37 зенитных расстояний. В 1924 г. было получено 157 зенитных расстояний, из них по предыдущему мы составляем всего 30 уравнений ошибок.

Таблица 3

Уравнения ошибок 1924 г.

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты			l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_{\beta}-Z_{\iota}$	Дата
		x	y	z					
1924					"	"	"	+ 29′ "	
V 27	3ч 26м	1	+ 0.783	+ 0.623	+ 0.15	+ 0.14	+ 0.33	31.71	1924.404
28—29	3 22	1	+ .772	+ .636	— .21	— .21	— .04	31.35	.407
VI 6—7	2 47	1	+ .666	+ .746	— .16	— .10	— .01	31.40	.432
7	2 39	1	+ .639	+ .769	+ .16	+ .24	+ .30	31.72	.434
7—8	2 35	1	+ .626	+ .780	— .01	+ .07	+ .13	31.55	.436
8—9	2 39	1	+ .639	+ .769	— .25	— .17	— .11	31.31	.437
8—9	2 35	1	+ .626	+ .780	— .42	— .34	— .28	31.14	.438
9	2 31	1	+ .612	+ .791	— .07	+ .02	+ .06	31.49	.440
17	1 57	1	+ .489	+ .873	— .09	+ .06	+ .01	31.47	.462
17—18	1 57	1	+ .489	+ .873	— .02	+ .13	+ .08	31.54	.463
17—18	1 53	1	+ .473	+ .881	— .17	— .02	— .07	31.39	.463
18	1 53	1	+ .473	+ .881	— .10	+ .05	.00	31.46	.464
18—19	1 49	1	+ .458	+ .889	— .02	+ .14	+ .07	31.54	.466
VII 8—9	0 22	1	+ .096	+ .995	— .07	+ .19	— .08	31.49	.522
10—11	0 22	1	+ .096	+ .995	— .09	+ .17	— .10	31.47	.526
15—16	23 58	1	— .004	+ 1.000	— .15	+ .13	— .19	31.41	.538
16	23 58	1	— .004	+ .000	— .20	+ .08	— .24	31.36	.542
22	23 34	1	— .113	+ .994	— .67	— .37	— .74	30.89	.558
22—23	23 34	1	— .113	+ .994	— .79	— .49	— .86	30.77	.559
23—24	23 34	1	— .113	+ .994	— .54	— .24	— .61	31.02	.560
29	23 6	1	— .233	+ .972	— .18	+ .13	— .28	31.38	.576
29—30	23 6	1	— .233	+ .972	— .00	+ .31	— .10	31.56	.578
30—31	23 6	1	— .233	+ .972	— .25	+ .06	— .35	31.31	.580
VIII 13—14	22 5	1	— .481	+ .877	— .21	+ .10	— .39	31.35	.619
14	22 5	1	— .481	+ .877	— .53	— .22	— .71	31.03	.620
14—15	22 5	1	— .481	+ .877	— .22	+ .09	— .40	31.34	.622
XII 13—14	14 18	1	— .566	— .824	+ .41	— .00	+ .20	31.97	.953
14	14 18	1	— .566	— .824	+ .27	— .14	+ .06	31.83	.956
14—15	14 13	1	— .548	— .836	+ .57	+ .15	+ .37	32.13	.954
14—15	14 13	1	— .548	— .836	+ .43	+ .01	+ .23	31.99	.958

	l	$H-B_1$	$H-B_2$
	+ 1.99	+ 2.27	+ 1.84
	— 5.42	— 2.30	— 5.56
Сумма квадратов:	3.0687	1.0723	3.3578

Нормальные уравнения

	s
$30.0000\,x + 19.4900\,z + 3.2200\,y = -3.4300$	49.2790
$23.0828\,z + 5.7637\,y = -6.1249$	42.2116
$6.9183 \quad = -0.8706$	15.0315

Решение нормальных уравнений дает:

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных	+0.1486	—0.4329	+0.1649			
Обратные веса	0.0766	0.1195	0.1804	—0.7046	+0.2303	—0.6675

Сумма квадратов остаточных ошибок

$[\lambda\lambda] = +3.0687 + 0.5099 - 2.6461 + 0.1436 = 1.0761$ по формуле

$= 1.0723$ из уравнений

Отсюда средняя ошибка

одного уравнения $\sqrt{\frac{1.0742}{30-3}} = \pm 0''.199$

» наблюдения $= \pm 0\ .141$

§ 12. Наблюдения 1925 г. В 1925 г. нами получено 322 зенитных расстояния. Разностей зенитных расстояний β Кассиопеи и ι Дракона, разделенных промежутком времени, не бо́льшим двух суток, оказалось 97. По предыдущему составляем 97 уравнений ошибок.

Таблица 4

Уравнения ошибок 1925 г.

Дата	$T_\odot$	Коэффициенты			l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_\beta - Z_\iota$	Дата
		x	y	z					
1925					″	″	″	+29′ ″	
I 17—18	11ч 51м	1	+0.039	+0.999	—0.33	—0.51	—0.44	31.23	1925.048
17—18	11 48	1	+ .052	— .999	.00	— .18	— .11	31.56	.049
19—20	11 35	1	+ .109	— .994	+ .36	+ .19	+ .27	31.92	.052
20—21	11 35	1	+ .109	— .994	+ .48	+ .31	+ .39	32.04	.056
21—22	11 35	1	+ .109	— .994	+ .53	+ .36	+ .44	32.09	.058
21—22	11 27	1	+ .143	— .990	+ .26	+ .10	+ .18	31.82	.060
22	11 27	1	+ .143	— .990	+ .31	+ .15	+ .23	31.87	.062
23—24	11 27	1	+ .143	— .990	+ .09	— .07	+ .01	31.65	.064
24	11 19	1	+ .178	— .984	— .16	— .31	— .23	31.40	.066
25—26	11 19	1	+ .178	— .984	+ .19	+ .04	+ .12	31.75	.070
26—27	11 6	1	+ .233	— .972	+ .20	+ .06	+ .15	31.76	.074
27—28	11 6	1	+ .233	— .972	+ .20	+ .06	+ .15	31.76	.076
27—28	11 2	1	+ .250	— .968	+ .36	+ .22	+ .31	31.92	.075
28	11 2	1	+ .250	— .968	+ .36	+ .22	+ .31	31.92	.078
II 7—8	10 17	1	+ .434	— .901	+ .26	+ .17	+ .27	31.82	.108
III 18—19	7 54	1	+ .879	— .477	— .50	— .46	— .34	31.06	.212
25—26	7 24	1	+ .934	— .358	+ .23	+ .29	+ .31	31.79	.232
26	7 24	1	+ .934	— .358	+ .10	+ .16	+ .18	31.66	.234
IV 5	6 48	1	+ .978	— .208	+ .32	+ .40	+ .52	31.88	.362
6—7	6 48	1	+ .978	— .208	+ .21	+ .29	+ .41	31.77	.264
6—7	6 44	1	+ .982	— .191	+ .24	+ .32	+ .44	31.80	.265
7	6 41	1	+ .984	— .178	+ .22	+ .30	+ .42	31.78	.266
8—9	6 41	1	+ .984	— .178	— .61	— .53	— .41	30.95	.270
1	6 33	1	+ .990	— .143	— .91	— .83	— .71	30.65	.272
15—16	6 15	1	+ .998	— .065	— .18	— .09	+ .03	31.38	.288
15—16	6 11	1	+ .999	— .048	— .33	— .24	— .12	31.23	.290
16	6 8	1	+ .999	— .035	— .63	— .54	— .42	30.93	.292
V 2—3	5 4	1	+ .970	+ .242	— .62	— .52	— .41	30.94	.336
3—4	5 4	1	+ .970	+ .242	— .01	+ .09	+ .20	31.55	.339

Таблица 4 (продолжение)

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты x	y	z	l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_\beta - Z_\iota$	Дата
1935					″	″	″	+29′ ″	
V 4	5ч 0м	1	+0.966	+0.259	—0.55	—0.45	—0.34	31.01	1925.338
4	5 0	1	+ .966	+ .259	+ .06	+ .10	+ .27	31.62	.340
4—5	4 56	1	+ .962	+ .276	+ .23	+ .33	+ .44	31.79	.342
14—15	4 25	1	+ .915	+ .403	— .15	— .05	+ .05	31.41	.368
14—15	4 21	1	+ .908	+ .419	— .38	— .28	— .18	31.18	.369
15—16	4 13	1	+ .893	+ .450	— .03	+ .06	+ .17	31.53	.372
24—25	3 37	1	+ .812	+ .584	— .42	— .34	— .24	31.14	.391
29	3 21	1	+ .769	+ .639	— .08	00	+ .09	31.48	.410
29—30	3 17	1	+ .758	+ .653	— .16	— .08	+ .01	31.40	.412
31	3 9	1	+ .734	+ .679	— .47	— .40	— .31	31.09	.414
VI 1—2	3 9	1	+ .734	+ .679	— .15	— .08	+ .01	31.41	.420
1—2	3 5	1	+ .722	+ .692	+ .10	+ .17	+ .26	31.66	.421
3—2	3 0	1	+ .707	+ .707	+ .08	+ .15	+ .24	31.64	.422
4—5	3 0	1	+ .707	+ .707	— .28	— .21	— .12	31.28	.426
5—6	2 48	1	+ .669	+ .743	+ .04	+ .10	+ .19	31.60	.430
6—7	2 44	1	+ .656	+ .754	+ .03	+ .09	+ .17	31.59	.431
6—7	2 48	1	+ .669	+ .743	+ .34	+ .40	+ .49	31.90	.434
7	2 44	1	+ .656	+ .754	+ .33	+ .39	+ .47	31.89	.435
7—8	2 48	1	+ .669	+ .743	+ .28	+ .34	+ .43	31.84	.435
7—8	2 44	1	+ .656	+ .754	+ .27	+ .33	+ .41	31.83	.436
25—26	1 25	1	+ .362	+ .932	+ .01	+ .01	+ .08	31.57	.484
26	1 25	1	+ .362	+ .932	— .06	— .06	+ .01	31.50	.487
26—27	1 21	1	+ .346	+ .938	— .27	— .27	— .21	31.29	.486
26—27	1 21	1	+ .346	+ .938	— .34	— .34	— .28	31.22	.488
27—28	1 25	1	+ .362	+ .932	+ .19	+ .19	+ .26	31.75	.488
27—28	1 21	1	+ .346	+ .938	— .09	— .09	— .03	31.47	.490
28—29	1 21	1	+ .346	+ .938	— .27	— .27	— .21	31.29	.491
VII 5—6	0 48	1	+ .208	+ .978	+ .62	+ .59	+ .64	32.18	.513
6	0 44	1	+ .191	+ .982	+ .47	+ .44	+ .49	32.03	.514
6—7	0 40	1	+ .174	+ .985	+ .34	+ .30	+ .35	31.90	.516
6—7	0 44	1	+ .191	+ .982	+ .13	+ .10	+ .15	31.69	.516
7	0 40	1	+ .174	+ .985	00	— .04	+ .01	31.56	.517
7—8	0 36	1	+ .156	+ .988	+ .45	+ .41	+ .46	32.01	.517
7—8	0 36	1	+ .156	+ .988	+ .11	+ .07	+ .12	31.67	.518
7—8	0 40	1	+ .174	+ .985	— .01	— .05	.00	31.55	.518
8	0 36	1	+ .156	+ .988	+ .10	+ .06	+ .11	31.66	.520
8—9	0 31	1	+ .135	+ .991	+ .17	+ .13	+ .17	31.73	.520
8—9	0 31	1	+ .135	+ .991	+ .16	+ .12	+ .16	31.72	.522
13—14	0 11	1	+ .048	+ .999	— .11	— .17	— .13	31.45	.534
14—15	0 11	1	+ .048	+ .999	+ .28	+ .22	+ .26	31.84	.536
15—16	0 3	1	— .013	+1.000	+ .04	— .03	+ .01	31.60	.539
20	23 47	1	— .057	+ .998	+ .08	— .01	+ .03	31.64	.553
20—21	23 43	1	— .074	+ .997	— .23	— .32	— .29	31.33	.554
20—21	23 47	1	— .057	+ .998	+ .10	+ .01	+ .05	31.66	.554
21	23 43	1	— .074	+ .997	— .21	— .30	— .27	31.35	.556

Таблица 4 (продолжение)

Дата	$T_\odot$	Коэффициенты			l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_t - Z_t$	Дата
		x	y	z					
1925					″	″	″	+29′ ″	
VII 21—22	23ч 39м	1	−0.092	+1.996	+0.13	+0.03	+0.07	31.69	1925.556
21—22	23 39	1	− .092	+ .996	+ .15	+ .09	+ .09	31.71	.556
21—22	23 43	1	− .074	+ .997	− .17	− .26	− .23	31.39	.557
22	23 39	1	− .092	+ .996	+ .19	+ .13	+ .13	31.75	.558
22—23	23 35	1	− .109	+ .994	+ .12	+ .02	+ .05	31.68	.558
22—23	23 35	1	− .109	+ .994	+ .16	+ .06	+ .09	31.72	.560
22—23	23 39	1	− .092	+ .996	+ .37	+ .31	+ .31	31.93	.560
23	23 35	1	− .109	+ .994	+ .34	+ .24	+ .27	31.90	.561
23—24	23 31	1	− .126	+ .992	+ .18	+ .08	± .11	31.74	.561
23—24	23 31	1	− .126	+ .992	+ .36	+ .26	+ .29	31.92	.562
25—26	23 31	1	− .126	+ .992	+ .14	+ .04	+ .07	31.70	.566
26	23 23	1	− .161	+ .987	+ .05	− .06	− .03	31.61	.569
26—27	23 19	1	− .178	+ .987	+ .06	− .05	− .03	31.62	.570
26—27	23 23	1	− .161	+ .987	+ .01	− .10	− .07	31.57	.570
27	23 19	1	− .178	+ .984	+ .02	− .10	− .07	31.58	.572
27—28	23 15	1	− .195	+ .981	+ .08	− .04	− .01	31.64	.572
27—28	23 15	1	− .195	+ .981	+ .04	− .08	− .05	31.60	.574
VIII 3—4	22 48	1	− .309	+ .951	+ .28	+ .13	+ .15	31.84	.590
9—10	22 25	1	− .403	+ .915	− .06	− .23	− .22	31.50	.608
10	22 25	1	− .403	+ .915	+ .08	− .09	− .08	31.64	.610
11—12	22 25	1	− .403	+ .915	+ .12	− .05	− .04	31.68	.612
24—25	21 33	1	− .598	+ .801	− .22	− .44	− .44	31.34	.649
25—26	21 33	1	− .598	+ .801	− .33	− .55	− .55	31.23	.650
					+12.81	+10.29	+14.03		
					− 9.32	−10.16	− 7.62		

Сумма квадратов: 7.9151 6.9170 7.3649

Нормальные уравнения

	s
$97.0000\,x + 41.7550\,z + 30.9480\,y = +3.4900$	173.1930
$68.0935\,z + 3.9081\,y = +0.6394$	114.3960
$28.9026\,y = -2.6282$	61.1305

Решение нормальных уравнений дает:

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных	+0.1338	−0.0597	−0.2262			
Обратные веса	0.0233	0.0220	0.0579	−0.1294	−0.2317	+0.1088

Сумма квадратов остаточных ошибок

$[\lambda\lambda] = 7.9151 - 0.4671 + 0.0382 - 0.5944 = 6.8918$ по формуле

$= 6.9170$ из уравнений

Отсюда средняя ошибка

одного уравнения $\sqrt{\dfrac{6.9044}{97-3}} = \pm 0''.271$

» наблюдения $= \pm 0.192$

§ 13. Наблюдения 1926 г. В 1926 г. получено 293 зенитных расстояния. По предыдущему получилась возможность составить 57 уравнений ошибок.

Таблица 5

Уравнения ошибок 1926 г.

Дата	$T_\odot$	Коэффициенты			l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_\beta - Z_\iota$	Дата
		x	y	z					
1926					″	″	″	+29′ ″	
I 30	10ч 59м	1	+0.263	−0.965	−0.18	−0.13	−0.22	31.38	1926.081
30	10 55	1	+ .280	− .960	+ .65	+ .71	+ .61	32.21	.082
II 22—23	9 24	1	+ .629	− .777	− .84	− .66	− .77	30.72	.147
23	9 20	1	+ .643	− .766	− .71	− .53	− .64	30.85	.148
III 27	7 22	1	+ .937	− .350	+ .03	+ .30	+ .21	31.59	.236
27—28	7 18	1	+ .943	− .334	+ .07	+ .34	+ .25	31.63	.237
V 5—6	4 57	1	+ .962	+ .271	+ .30	+ .54	+ .51	31.86	.346
VI 4	2 57	1	+ .698	+ .716	+ .12	+ .24	+ .28	31.68	.423
4—5	2 53	1	+ .685	+ .728	− .31	− .20	− .16	31.25	.425
4—6	2 49	1	+ .672	+ .740	− .09	+ .01	+ .06	31.47	.426
5—6	2 53	1	+ .685	+ .728	− .30	− .19	− .15	31.26	.428
6	2 49	1	+ .672	+ .740	− .08	+ .02	+ .07	31.48	.429
6—7	2 45	1	+ .659	+ .752	− .08	+ .02	+ .06	31.48	.430
6—8	2 41	1	+ .646	+ .763	− .02	+ .07	+ .12	31.54	.432
23—24	1 34	1	+ .399	+ .917	+ .42	+ .41	+ .50	31.98	.476
VII 1—2	1 5	1	+ .280	+ .960	+ .02	− .04	+ .06	31.58	.498
2	1 1	1	+ .263	+ .965	+ .02	− .04	+ .06	31.58	.499
2—3	0 57	1	+ .246	+ .969	− .10	− .17	− .07	31.46	.501
6—8	0 45	1	+ .195	+ .981	− .03	− .12	− .01	31.53	.514
8—9	0 32	1	+ .139	+ .990	− .30	− .41	− .30	31.26	.518
9	0 32	1	+ .139	+ .990	− .20	− .31	− .20	31.36	.519
8—10	0 28	1	+ .122	+ .993	− .09	− .21	− .09	31.47	.519
9—10	0 28	1	+ .122	+ .993	+ .01	− .11	+ .01	31.57	.520
9—11	0 24	1	+ .105	+ .994	+ .01	− .11	+ .01	31.57	.522
9—11	0 32	1	+ .139	+ .990	+ .35	+ .24	+ .35	31.91	.522
10—11	0 28	1	+ .122	+ .993	+ .56	+ .44	+ .56	32.12	.524
11	0 24	1	+ .105	+ .994	+ .56	+ .44	+ .56	32.12	.525
11—13	0 24	1	+ .105	+ .994	+ .10	− .02	+ .10	31.66	.528
13—14	0 12	1	+ .052	+ .999	+ .28	+ .14	+ .26	31.84	.532
14	0 12	1	+ .052	+ .999	− .11	− .25	− .13	31.45	.533
14—15	0 12	1	+ .052	+ .999	+ .03	− .11	+ .01	31.59	.534
18—19	23 52	1	− .035	+ .999	− .20	− .38	− .24	31.36	.546
19—21	23 52	1	− .035	+ .999	+ .20	+ .02	+ .16	31.76	.550

Таблица 5 (продолжение)

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты x	y	z	l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_\beta - Z_\iota$	Дата
1926					″	″	″	+29′ ″	
VII 25—26	23ч 24м	1	+0.156	+0.988	0.00	−0.22	−0.08	31.56	1926.564
26	23 24	1	+ .156	+ .988	+ .24	+ .02	+ .16	31.80	.566
VIII 1—2	22 57	1	— .271	+ .962	+ .28	+ .02	+ .16	31.84	.584
2	22 57	1	— .271	+ .962	+ .12	— .14	.00	31.68	.585
10—11	22 22	1	— .415	+ .910	+ .14	— .17	— .02	31.70	.608
11	22 22	1	— .415	+ .910	+ .07	— .24	— .09	31.63	.610
11—12	22 22	1	— .415	+ .910	+ .16	— .15	.00	31.72	.611
11—13	22 22	1	— .415	+ .910	+ .42	+ .11	+ .26	31.98	.612
12—14	22 11	1	— .458	+ .889	+ .19	— .14	+ .02	31.75	.615
13—14	22 11	1	— .458	+ .889	+ .45	+ .12	+ .28	32.01	.616
IX 15	20 12	1	— .839	+ .545	+1.23	+ .78	+ .93	32.79	.706
20	19 56	1	— .875	+ .485	+ .61	+ .16	+ .30	32.17	.720
20—21	19 52	1	— .883	+ .469	+ .67	+ .21	+ .36	32.23	.722
23—24	19 45	1	— .897	+ .442	+ .43	— .03	+ .11	31.99	.730
21—24	19 52	1	— .883	+ .469	+ .68	+ .22	+ .37	32.24	.728
XII 11—12	14 29	1	— .605	— .796	+ .20	— .08	— .09	31.76	.944
12—14	14 29	1	— .605	— .796	+ .22	— .06	— .07	31.78	.948
17—18	14 7	1	— .526	— .850	— .22	— .47	— .49	31.34	.962
17—19	14 7	1	— .526	— .850	— .23	— .48	— .50	31.33	.964
18—19	13 58	1	— .492	— .870	+ .43	+ .19	+ .17	31.99	.965
19	13 58	1	— .492	— .870	+ .42	+ .18	+ .16	31.98	.966
19—20	13 58	1	— .492	— .870	+ .22	— .02	— .04	31.78	.968
19—20	13 53	1	— .473	— .881	+ .44	+ .21	+ .19	32.00	.968
20	13 53	1	— .473	— .881	+ .24	+ .01	— .01	31.80	.970
		57			+11.59	+6.17	+8.28		
					− 4.09	−6.19	−4.37		
				Сумма квадратов:	7.6870	4.6312	5.3121		

Нормальные уравнения

$$57.0000\,x + 24.0680\,z - 0.5500\,y = +\,7.5000 \qquad s\ 88.0180$$

$$42.0126\,z + 2.8015\,y = +\,3.9424 \qquad 12.8247$$

$$14.9773 = -\,5.4906 \qquad 11.7385$$

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных...	+ 0.1026	+ 0.0600	— 0.3740			
Обратные веса...	0.0233	0.0320	0.0681	— 0.1358	+ 0.0340	— 0.0649

Сумма квадратов остаточных ошибок

$[\lambda\lambda] = 7.6870 - 0.7698 - 0.2365 - 2.0537 = 4.6270$ по формуле

$= 4.6312$ из уравнений.

Отсюда средняя ошибка

одного уравнения $\sqrt{\dfrac{4.6271}{57-3}} = \pm\,0.293$

» наблюдения $= \pm\,0.208$

§ 14. Наблюдения 1927 г. В 1927 г. получено 219 зенитных расстояний. По предыдущему получилась возможность составить 49 уравнений ошибок.

Таблица 6

Уравнения ошибок 1927 г.

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты			l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_{\beta}-Z_{\iota}$	Дата
		x	y	z					
1927					″	″	″	+ 29′ ″	
I 2	12ч 56м	1	− 0.242	− 0.970	−0.18	− .28	−0.37	31.38	19270.004
22—20	11 38	1	+ .096	− .995	+ .08	− .01	− .01	31.64	.056
22—21	11 33	1	+ .118	− .993	− .11	− .20	− .20	31.45	.057
22	11 29	1	+ .135	− .991	− .08	− .17	− .16	31.48	.058
II 10—11	10 7	1	+ .473	− .881	− .62	− .69	− .60	30.94	.112
11	10 7	1	+ .473	− .881	− .40	− .47	− .38	31.16	.114
21—22	9 28	1	+ .616	− .788	+ .09	+ .03	+ .16	31.65	.142
22	9 25	1	+ .626	− .780	+ .33	+ .27	+ .40	31.89	.144
22—24	9 17	1	+ .653	− .758	+ .14	+ .08	+ .22	31.70	.146
III 13—15	8 14	1	+ .834	− .552	+ .34	+ .31	+ .48	31.90	.198
14—15	8 10	1	+ .843	− .537	+ .20	+ .17	+ .34	31.76	.200
15	8 6	1	+ .853	− .522	+ .20	+ .17	+ .35	31.76	.200
24	7 34	1	+ .917	− .399	+ .45	+ .43	+ .62	32.01	.226
24—26	7 34	1	+ .917	− .399	− .38	− .40	− .21	31.18	.228
24—26	7 26	1	+ .930	− .366	+ .85	+ .83	+1.03	32.41	.228
26	7 26	1	+ .930	− .366	+ .02	.00	+0.20	31.58	.232
26—27	7 23	1	+ .935	− .354	+ .10	+ .09	+ .28	31.66	.232
VI 12	2 25	1	+ .591	+ .806	− .39	− .32	− .26	31.17	.446
12—13	2 21	1	+ .577	+ .817	− .18	− .11	+ .06	31.38	.448
12—14	2 17	1	+ .563	+ .827	− .26	− .19	+ .14	31.30	.449
19	1 56	1	+ .485	+ .875	− .16	− .09	+ .06	31.40	.465
19—20	1 52	1	+ .469	+ .883	− .17	− .10	− .07	31.39	.466
28	1 19	1	+ .338	+ .941	− .05	+ .02	+ .01	31.51	.490
27—28	1 23	1	+ .354	+ .935	+ .12	+ .19	+ .18	31.68	.488
28—29	1 15	1	+ .321	+ .947	− .08	− .01	− .02	31.48	.492
28—30	1 19	1	+ .338	+ .941	− .04	+ .03	+ .02	31.52	.492
29—30	1 15	1	+ .321	+ .947	− .07	.00	− .01	31.49	.493
30—31	1 15	1	+ .321	+ .947	+ .08	+ .15	+ .14	31.64	.494
30—32	1 2	1	+ .267	+ .964	− .29	− .22	− .25	31.27	.496
VII 2—1	1 2	1	+ .267	+ .964	− .14	− .07	− .10	31.42	.498
17	0 1	1	+ .004	+ .000	− .11	− .04	− .14	31.45	.542
17—18	23 57	1	− .013	+ .000	− .25	− .18	− .29	31.31	.543
17—19	0 1	1	+ .004	+ .000	− .07	.00	− .10	31.49	.542
18—19	23 57	1	− .013	+ .000	− .21	− .14	− .25	31.35	.544
19—20	23 49	1	− .048	+ 0.999	− .30	− .23	− .35	31.26	.546

Таблица 6 (продолжение).

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты			l	$H-B_1$	$H-B_2$	$Z_\beta - Z_t$	Дата
		x	y	z					
1927					″	″	″	+ 29′	
VII 18—20	23ч 57м	1	− 0.013	+ 1.000	−0.29	−0.22	−0.33	31.27	1927.547
20	23 49	1	− .048	+ 0.999	− .38	− .31	− .43	31.18	.550
28—29	23 17	1	− .187	+ .982	+ .02	+ .08	− .07	31.58	.572
29—30	23 9	1	− .221	+ .975	+ .18	+ .24	+ .08	31.74	.575
30—31	23 9	1	− .221	+ .975	+ .08	+ .14	− .02	31.64	.578
VIII 4—5	22 46	1	− .317	+ .948	− .18	+ .23	− .31	31.38	.591
5—6	22 46	1	− .317	+ .948	− .08	+ .13	− .21	31.48	.594
6—7	22 38	1	− .350	+ .937	+ .24	− .13	+ .10	31.80	.596
7—9	22 38	1	− .350	+ .937	+ .20	− .03	+ .06	31.76	.600
24—25	21 34	1	− .595	+ .804	+ .44	+ .27	+ .22	32.00	.646
XI 22—23	15 52	1	− .848	− .530	+ .25	+ .12	− .10	31.81	.892
23	15 52	1	− .848	− .530	+ .20	+ .36	− .15	31.76	.894
XII 5—6	14 56	1	− .695	− .719	+ .15	+ .15	− .16	31.71	.928
6	14 56	1	− .695	− .719	+ .09	+ .10	− .22	31.65	.930
					+4.85	+459	+4.89		
					−5.47	−461	−6.03		

Сумма квадратов: 3.4046 3.0740 4.1560

Нормальные уравнения

	s
$49.0000\,x + 12.2680\,z + 9.5480\,y = -0.6200$	70.1960
$35.2302\,z - 1.4489\,y = -2.6811$	43.3682
$13.7664\,y = -0.1767$	21.6895

В результате решения уравнений имеем:

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных...	+ 0.0140	− 0.0823	− 0.0312			
Обратные веса...	0.0268	0.0323	0.0874	− 0.1013	− 0.1963	+ 0.1042

Сумма квадратов остаточных ошибок

$[\lambda\lambda] = 3.4046 + 0.0087 - 0.2206 - 0.0055 = 3.1872$ по формуле
$= 3.0740$ из уравнений

Отсюда средняя ошибка

одного уравнения $\sqrt{\frac{3.1306}{49-3}} = \pm 0.261$

» наблюдения $= \pm 0.185$

§ 15. Наблюдения 1928 г. В 1928 г. было получено 199 зенитных расстояний. Из этого материала для β Кассиопеи и ι Дракона по предыдущему получаем 41 уравнение ошибок.

Таблица 7

Уравнения ошибок 1928 г.

Дата	$T_{\odot}$	Коэффициенты			l	$H—B_1$	$H—B_2$	$Z_{\beta}—Z_{\iota}$	Дата
		x	y	z					
1928					″	″	″	+29′ ″	
II 14	9ᵘ 57ᵐ	1	+0.511	—0.859	—0.44	—0.48	—0.41	31.12	1928.120
25—27	9 14	1	+ .663	— .749	+ .16	+ .18	+ .24	31.72	.153
26—27	9 10	1	+ .676	— .737	+ 44	+ .46	+ .53	32.00	.154
26—28	9 10	1	+ .676	— .737	+ .44	+ .46	+ .53	32.00	.156
26—28	9 3	1	+ .698	— .716	+ .24	+ .27	+ .33	31.80	.157
28	9 3	1	+ .698	— .716	+ .24	+ .27	+ .33	31.80	.158
III 1—2	8 52	1	+ .731	— .682	— .08	— .03	+ .02	31.48	.166
2	8 52	1	+ .731	— .682	+ .07	+ .12	+ .17	31.63	.166
10—11	8 22	1	+ .814	— .581	+ .13	+ .21	+ .26	31.69	.188
9—11	8 26	1	+ .804	— .595	— .04	+ .04	+ .09	31.52	.188
11	8 18	1	+ .824	— .566	— .08	+ .01	+ .06	31.48	.192
11—12	8 15	1	+ .831	— .556	— .06	+ .03	+ .08	31.50	.192
15—17	8 4	1	+ .857	— .515	— .37	— .27	— .22	31.19	.204
17	7 56	1	+ .875	— .485	— .35	— .24	— .20	31.21	.208
17—18	7 56	1	+ .875	— .485	— .05	+ .06	+ .10	31.51	.209
17—19	7 56	1	+ .875	— .485	— .06	+ .05	+ .09	31.50	.210
17—19	7 49	1	+ .889	— .458	— .14	— .02	+ .02	31.42	.210
18—19	7 49	1	+ .889	— .458	+ .16	+ .28	+ .32	31.72	.212
19	7 49	1	+ .889	— .458	+ .15	+ .27	+ .31	31.71	.214
19—20	7 49	1	+ .889	— .458	— .03	— .19	+ .13	31.25	.214
19—21	7 42	1	+ .903	— .431	— .18	— .06	— .01	31.38	.214
20—21	7 42	1	+ .903	— .431	— .44	— .32	— .27	31.12	.216
20—22	7 38	1	+ .910	— .415	— .20	— .07	— .03	31.36	.218
21—23	7 42	1	+ .903	— .431	— .36	— .24	— .19	31.20	.221
22—23	7 38	1	+ .910	— .415	— .12	+ .01	+ .05	31.44	.224
23—24	7 31	1	+ .922	— .387	— .39	— .26	— .22	31.17	.228
24—25	7 31	1	+ .922	— .387	— .36	— .23	— .19	31.20	.231
25—26	7 23	1	+ .935	— .354	— .29	— .15	— .11	31.27	.234
V 13—14	2 18	1	+ .566	+ .824	— .48	— .34	— .36	31.08	.450
VI 27—29	1 20	1	+ .342	+ .940	— .10	— .02	— .04	31.46	.490
29—30	1 7	1	+ .288	+ .958	+ .17	+ .24	+ .22	31.73	.494
VII 2—4	0 59	1	+ .255	+ .967	+ .54	+ .60	+ .58	32.10	.504
9—10	0 26	1	+ .113	+ .994	— .01	+ .01	— .01	31.55	.522
10—12	0 26	1	+ .113	+ .994	+ .05	+ .07	+ .05	31.61	.526
12	0 18	1	+ .078	+ .997	+ .31	+ .32	+ .30	31.87	.528
12—13	0 14	1	+ .061	+ .998	— .44	— .44	— .46	31.12	.530
16—18	0 2	1	+ .009	+1.000	— .38	— .40	— .41	31.18	.542
VIII 13	22 13	1	— .450	+ .893	+ .19	+ .02	+ .02	31.75	.616
13—14	22 13	1	— .450	+ .893	+ .18	+ .01	+ .01	31.74	.616
X 5	19 0	1	— .966	+ .259	+ .53	+ .14	+ .18	32.09	.762
XII 14—15	14 13	1	— .566	— .824	00	— .37	— .28	31.56	.954
		41			+4.00	+4.13	+5.02		
					—5.45	—4.13	—3.41		
Сумма квадратов:					3.3135	2.6814	2.7513		
Общая сумма квадратов:					50.0204		41.7557		

Нормальные уравнения

	s
$41.0000\,x - 5.3369\,z + 22.3969\,y = -1.7390$	56.3390
$19.5211\,z - 11.0237\,y = +0.9189$	4.0795
$21.4851\,y = -3.0208$	29.8370

В результате решения уравнений имеем:

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных	+ 0.1139	— 0.0761	— 0.3087			
Обратные веса	0.0670	0.0853	0.1737	— 0.2976	— 0.8515	+ 0.7482

Сумма квадратов остаточных ошибок

$[\lambda\lambda] = 3.3135 + 0.1971 + 0.0883 - 0.9325 = 2.6664$ по формуле
$= 2.6814$ из уравнений

Отсюда средняя ошибка

одного уравнения $\sqrt{\frac{2.6739}{41-3}} = \pm 0''265$

» наблюдения $= \pm 0.188$

§ 16. Общее решение всех уравнений за 1918—1928 гг. После получения выводов по отдельным годам выяснился интерес иметь общий вывод за все годы. Для этого мы просуммировали соответственно коэффициенты приведенных выше нормальных уравнений и получили из совокупности следовательно 371 уравнение ошибок

Нормальные уравнения за время 1918—1928 гг.

	s
$371.0000\,x + 147.4050\,z + 95.0090\,y = -5.0200$	698.3930
$245.1432\,z + 4.0188\,y = -0.2299$	396.3690
$125.8486\,y = -29.2433$	195.6650

Решение этих уравнений дает:

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных . . .	+ 0.0777	— 0.0428	— 0.2896			
Обратные веса Q	0.0047	0.0057	0.0105	— 0.0275	— 0.0344	+ 0.0189

Сумма квадратов остаточных ошибок:

$[\lambda\lambda] = 50.0204 + 0.3899 - 0.0099 - 8.4694 = 41.9310$ по формуле
$= 41.7557$ из 371 уравнения

Отсюда средняя ошибка

одного уравнения $\sqrt{\frac{41.8434}{371-3}} = \pm 0''337$ (19)

» наблюдения $= \pm 0.239$

§ 17. Общее решение уравнений за 1920—1928 гг. Из разностей зенитных расстояний β Кассиопеи и ι Дракона 1918—1919 гг. амплитуда суточной солнечной волны в колебаниях широты, а также значение величины x, поправки принятой разности склонений, получились абсолютно слишком большими сравнительно с соответственными величинами в остальные из рассмотренных годов. Это обстоятельство побуждает получить общий вывод еще и с исключением материала 1918—1919 гг. Суммируя соответственно коэффициенты приведенных выше нормальных уравнений, мы получаем из совокупности следовательно 330 уравнений ошибок

Нормальные уравнения за время 1920—1928 гг.

	s
$330.0000\,x + 115.3960\,z + 79.7559\,y = -9.3390$	515.8200
$215.9894\,z - 3.4075\,y = -6.0688$	321.9108
$114.0058\,y = -25.9445$	164.4109

Решение этих уравнений дает:

	x	z	y	xz	xy	zy
Значения неизвестных	$+0.0598$	-0.0643	-0.2713			
Обратные веса	0.0048	0.0060	0.0112	-0.0260	-0.0341	$+0.0200$

Сумма квадратов остаточных ошибок:

$$[\lambda\lambda] = 40.0113 + 0.5579 - 0.3904 - 7.0395 = 33.1393 \text{ по формуле}$$
$$= 33.4771 \text{ из 330 уравнений}$$

Отсюда средняя ошибка

$$\text{одного уравнения} \quad \sqrt{\frac{33.3082}{330-3}} = \pm 0''.319 \qquad (20)$$
$$\text{» наблюдения} \qquad = \pm 0.226$$

§ 18. **Выражения суточной солнечной волны по отдельным годам и за все время 1918—1928 и 1920—1928 гг.** От вычисленных и приведенных выше в §§ 9—17 значений z и y мы по формулам (9) переходим к значениям фазы ν и к значениям амплитуды a суточной солнечной волны.

Таким образом для выражения суточной солнечной волны в колебаниях широты места $\varphi = \delta + z$ получаются такие.

Таблица 8

Значения параметров волны и числа, характеризующие обстановку вывода.

Годы	x	a	ν	n	Уменьшение суммы квадратов	Средняя ошибка одного: уравн.	Средняя ошибка одного: наблюд
1918—1919	$+1''.805$	$+1''.221$	$-9^{ч}\ 38^{м}\ 1$	41	7.00	$\pm 0''.28$	± 0.20
1920	-0.135	0.237	$-11\ 39\ 0$	56	7.96	.34	.24
1924	$+0.149$	0.255	$-4\ 36\ 4$	30	1.99	.20	.14
1925	$+0.134$	[illegible]	$-11\ 1\ 0$	97	1.02	.27	.19
1926	$+0.102$	0.209	$-12\ 36\ 4$	57	3.06	.29	.21
1927	$+0.014$	0.048	$-7\ 23\ 1$	49	0.21	.26	.18
1928	$+0.114$	0.323	$-10\ 50\ 8$	41	0.65	.26	.19

Обобщая все годы вместе, имеем

в 1918—1928 гг.	$+0''.078 \pm 23$	$0''.161 \pm 23$	$-11^{ч}\ 26^{м} \pm 33$	371	8.09	$\pm 0''.33$	$\pm 0''.24$
» 1920—1928 »	$+0.060 \pm 22$	0.154 ± 29	$-11^{ч}\ 7^{м} \pm 27$	330	6.87	± 0.32	± 0.23

Видим, что исключение материала 1918—1919 гг., давшего чрезмерно большое значение амплитуды колебаний широты и большое значение величины x, ничего следовательно не меняет в окончательном выводе.

Четыре последних столбца справа в табл. 8 показывают соответственно количество n служивших выводу разностей $z_\beta - z_\iota$, размер уменьшения суммы квадратов ошибок после выключения суточной солнечной волны, среднюю ошибку одной разности после выключения и среднюю ошибку одного наблюденного зенитного расстояния на основании материалов, относящихся только к двум звездам β Кассиопеи и ι Дракона.

Вставив значения a, ν и x таблицы в формулу

$$z_\beta - z_\iota = \delta_k - \delta_\iota + 2a \sin\left(\frac{\alpha_k + \alpha_\iota}{2} - \frac{\alpha''_\odot + \alpha'_\odot}{2} - \nu\right) \sin\left(\frac{\alpha_k - \alpha_\iota}{2} - \frac{\alpha''_\odot - \alpha'_\odot}{2}\right), \quad (21)$$

не трудно представить себе вид годовой волны в разностях $z_\beta - z_\iota$.

Вставляя те же значения таблицы в формулу (1),

$$\varphi = \delta + z - a\cos(\sigma - \nu), \quad (22)$$

не трудно представить себе выражения суточной солнечной волны в колебаниях широты или, выражаясь совершенно точно, в колебаниях зенитных расстояний, наблюдаемых возле самого зенита. В статье 1917 г., напечатанной в 1919 г., мы эти колебания у самого зенита назвали эффектом смещений зенита[1]. Это далеко не то самое, что рефракционный уклон, предположенный Гюльденом при обработке наблюдений Петерса на вертикальном круге: рефракционный уклон Гюльдена возле самого зенита равен нулю[2], что совершенно не соответствует нашему выводу.

§ 19. **Суточная солнечная волна в колебаниях широты есть явление реальное.** Мы показали, что средняя ошибка одного наблюдения на пассажном инструменте в первом вертикале получается равной $\pm 0''.26$, если ее вычислять через посредство разностей между зенитными расстояниями различных звезд (см. § 7), и получается равной $\pm 0''.20$ и меньше (размеры зависят еще от сезона), если ее вычислять по разностям между смежными наблюдениями той же самой звезды. Уже этого одного факта достаточно, чтобы признать существование колебания, близкого по периоду к суткам, так как оно выключается в разностях последовательно наблюденных z одной и той же звезды и не выключается в разностях z различных звезд, наблюденных в те же сутки.

После вышепредставленного решения уравнений мы в табл. 8 имеем и выражение суточной солнечной волны в колебаниях широты и полное доказательство реальности ее существования. В табл. 8 мы видим:

1) Во всех девяти рядах использованных нами наблюдений уменьшение суммы квадратов остаточных ошибок и отсюда отчетливое уменьшение средней ошибки одного наблюдения после выключения полученной суточной солнечной волны.

2) Совпадение фазы и характера размера амплитуды в общем выводе за 1918—1928 гг. и за 1920—1928 гг.:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi = \Delta z &= 0''.161\cos(\sigma - 11^h.45) \text{ из } 371 \\ &\quad \pm 23 \qquad\qquad \pm 55 \\ &= 0.154\cos(\sigma - 11.12) \text{ из } 330 \\ &\quad \pm 29 \qquad\qquad \pm 45 \end{aligned}\right\} \text{разностей зенитных расстояний } \beta \text{ Кассиопеи и } \iota \text{ Дракона} \quad (23)$$

с фазой и амплитудой, получившимися у нас совсем другим методом из наблюдений 1840—1842 гг. В. Струве:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \Delta z &= 0''.134\cos(\sigma - 12^h.68) \text{ из } 157 \text{ зенитных расстояний} \\ &\quad \pm 28 \qquad\qquad \pm 78 \qquad\qquad \text{семи звезд} \end{aligned} \quad (24)$$

[1] А. С. Васильев. Влияние формы и приливов земной атмосферы на зенитные расстояния светил, Изв. Акад. Наук, 1919 г., стр. 175—206.

[2] См. Observations de Poulkovo, v. V, 1873, p. 33.

Средняя ошибка одного наблюдения там оказалась $= \pm 0.''172$.

Третий признак реальности указан выше в начале этого параграфа: значение средней ошибки зависит от метода сочетания наблюдений, принятого для ее получения.

§ 20. Влияние распределения наблюдений на поправку к разности склонений звезд. Рассмотрим подробности нашего вывода. В табл. 8 даны значения величины x, которая есть поправка к принятому в основу решения значению первого члена $\delta_\iota - \delta_\beta$, интерполяционной формулы (21) для разности зенитных расстояний звезд β Кассиопеи и ι Дракона. Мы видим, что значения этой поправки в разные годы и особенно в 1918—1919 гг. получились, во-первых, далеко не малыми, а во-вторых, во все годы кроме 1920 г. получились со знаком плюс. Отчего это? Это явление возникло на почве неравномерного распределения наблюдений по годовому циклу.

Для доказательства этого исходим из известных теперь значений фазы $\nu = 11^h\!.4$ суточной волны и амплитуды $a = 0.''161$; строим годовую волну в разности $z_\beta - z_\iota$ зенитных расстояний двух рассматриваемых звезд по формуле (6) или (21),—волну, возникающую из колебания суточного. Возможно, что реально годовая волна разности зенитных расстояний не одинакова для всех годов, но для простоты мы принимаем ее для всех годов одинаковой. Наносим на диаграмму среднее для 1918—1928 гг. выражение по ординатам, данным вычислением через каждую десятую долю года или на первое число каждого месяца. И на этой же диаграмме параллельно оси абсцисс наносим в виде прямой линии время наблюдений.

Значения ординат волны на первое число каждого месяца и соответствующие доли года для ориентировки мы здесь показываем:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
.000	.085	.164	.249	.331	.416	.498	.583	.668	.750	.835	.917
+0″120	—.046	—.179	—.269	—.294	—.242	—.127	+.031	+.173	+.262	+.294	+.247

Мы видим на чертеже или без чертежа, просто по этой табличке, что в 1918—1919 гг. наблюдения приходятся только на второй трети всей годовой волны и именно на ее углубленной части, начинаются 9 IV = 0.270 г. и оканчиваются 24 VII = 0.560 г. (см. табл. 1 в списке наблюдений). В это время года β Кассиопеи наблюдается днем между 11 ч. и 5 ч. утра, а ι Дракона наблюдается ночью между 2 ч. ночи и 7 ч. вечера, причем наблюдения через гребень суточной солнечной волны, через 11.4 ч. или вообще через полночь проходят около 7—12 мая. Говоря коротко, согласно с нашим выражением суточной солнечной волны все зенитные расстояния звезды β Кассиопеи в 1919 г. наблюдались уменьшенными, а зенитные расстояния ι Дракона—увеличенными; следовательно разность этих зенитных расстояний наблюдалась все время уменьшенной, т. е. меньшей, чем значение, среднее из 402 разностей, которые мы для нее приняли:

$$z_\beta - z_\iota = +29'31.''56 \pm 0.''018.$$

Отсюда и получилось в результате нашего решения уравнений указание, что разность склонений фактически должна будто бы быть увеличенной на $1.''805$, чтобы удовлетворять нашим уравнениям 1918—1919 гг.

Вот в сжатом виде сроки наблюдения разностей $z_\beta - z_\iota$ по отдельным годам в тысячных долях года:

1918—1919	0.270—0.560
1920	0.203—0.246, 0.442—0.802
1924	0.404—0.466, 0.522—0.622, 0.953—0.958
1925	0.048—0.650
1926	0.081—0.287, 0.346, 0.423—0.728, 0.944—0.970
1927	0.004—0.232, 0.446—0.646, 0.892—0.930
1928	0.120—0.234, 0.450—0.542, 0.616, 0.762, 0.954

Рассмотрение распределения наблюдений в другие годы приводит к подобному же заключению. Именно, знак величины x' определяется распределением наблюдений по реально существующей годовой волне разности зенитных расстояний; наблюдения, соответствующие углубленной части волны, создают в величине x' знак плюс, наблюдения в ее гребневой части создают знак минус,—такой знак получился для 1920 г. И размер величины x' определяется распределением, а также продолжительностью ряда наблюдений. Почему же в значениях величины x' преобладает знак плюс? Господство знака плюс в величине x' определяется особенностями погоды в Пулкове. Конец октября и начало ноября в Пулкове за годы 1918—1921, 1924—1928 не дали возможности получить ни одной разности зенитных расстояний звезд β Кассиопеи и ι Дракона. Однако другие части собранного нами материала,—они в вычислениях еще не закончены,—этот пробел заполняют совершенно.

Здесь в переменах значения x' в различные годы в зависимости от распределения наблюдений мы имеем еще один, четвертый, вполне отчетливый признак реальности суточной солнечной волны в колебаниях широты.

§ 21. Точность определения фазы и амплитуды зависит от распределения наблюдений. Нетрудно путем дифференцирования фазы ν и амплитуды a по наблюдаемым z показать, что на точность значений и фазы и амплитуды влияет также распределение наблюдений. Дифференцирование в выражениях (6), (14) или (21) ν и a по z дает

$$d\nu = -\frac{d(z_\beta - z_\iota)}{2a\cos\left(\frac{\alpha_k+\alpha_\iota}{2} - \alpha_\odot - \nu\right)\sin\Delta}, \quad da = \frac{d(z_\beta - z_\iota)}{2\sin\left(\frac{\alpha_k+\alpha_\iota}{2} - \alpha_\odot - \nu\right)\sin\Delta}; \quad (25)$$

т. е. фаза ν наиболее точно должна получаться из тех наблюдений, когда ордината волны в разности $z_\beta - z_\iota$ близка к нулю. Из получившегося у нас выражения (23), $\nu = 11^{ч}\!.4$, суточной солнечной волны, мы видим, что это бывает при $\sigma_\odot = \nu \pm 6$ ч., т. е. во время наблюдений приблизительно утром и вечером,—тогда суточная волна имеет наиболее крутой ход вверх или вниз. Амплитуда же наиболее точно получается из наблюдений, произведенных в эпоху, когда $z_\beta - z_\iota$ получает наибольшее значение положительное или отрицательное, следовательно, для уточнения значения амплитуды необходимы наблюдения около полудня и полуночи.

Вопрос о том, действительно ли амплитуда суточной солнечной волны в колебаниях широты в 1919 г. была свыше 1″ остается пока открытым. Необходимо проработать другие части нашего материала. Ход остаточных ошибок $H - B_1$ и $H - B_2$ не выявляет в этом месте ничего ненормального.

В 1927 г. амплитуда получилась сравнительно малой; возможно потому, что наблюдений околополуденных, соответственно около 0.23 и 0.87 года, и околополуночных, около 0.73 и 0.37 года, звезд β Кассиопеи и

ι Дракона в этом ряду совершенно не оказалось. Это мы видим на диаграмме и также на табличке на стр. 910.

§ 22. Суточная солнечная волна возникает не из пассажного инструмента и не из его местоположения. Мы получили выводы и проследили внутренние признаки несомненной реальности суточного колебания в зенитных расстояниях у самого зенита. Возникает вопрос, не является ли так отчетливо выявленная нами суточная солнечная волна особенностью только пассажного инструмента в первом вертикале, как инструмента, или не возникает ли она из особенностей его местоположения в обсерватории?

Инструмент стоит в 14 м к югу от южной стены башни 15-дюймового рефрактора и в 11 м от стены расширенного основания этой башни. В таком же точно расстоянии от этих предметов, но к западу расположен был до сих пор и вертикальный круг, дающий основные значения склонений звезд. Пассажный инструмент в меридиане, дающий основные прямые восхождения, расположен от названных предметов еще ближе на запад в расстоянии соответственно 8 и 5 м. Таково же расположение и меридианного круга, но к востоку.

Такое расположение основных инструментов обсерватории дает основание заключить, что явления, которые было бы возможно приписать несовершенству местоположения, должны были бы проявиться на вышеназванных инструментах в степени не меньшей, чем на пассажном инструменте в первом вертикале. Однако 90 лет наблюдений не дали ничего определенного. В 1928 г. вертикальный круг (работы Эртеля) перенесен на новое место. Но нужен ли был этот перенос в действительности? Наши исследования приводят в этом вопросе к большим сомнениям.

Вопрос о переносе пассажного инструмента в первом вертикале на другое место ставился многократно, но был мною и в 1910 г., и в 1912 г., и в 1916 г., и в 1922 г. настойчиво отклонен. Мотивы такого отношения к переносу инструмента опубликованы мною в 1912 г. в исследовании «70 лет истории Пулковского пассажного инструмента в первом вертикале».[1] К этому теперь мы прибавили 5 200 наблюдений, произведенных нами, 4 700 наблюдений, вычисленных главным образом Н. И. Васильевой под нашей редакцией, и ряд уже опубликованных по предмету работы инструмента исследований. Это много обширнее всего того, что было на инструменте получено до нас за 70 лет; оно не дает оснований менять наши утверждения, высказанные в 1912 г. Запутанная в прошлом история инструмента внесла в нашу работу много осложнений, но главной причиной, создавшей медленность в обработке наблюдений, является недостаточное снабжение инструмента вычислительной помощью, особенно в 1920—1928 гг. Об этом мы заявляли печатно в 1928 г. Ограниченна помощь и в 1933 г. и в 1934 г.

Если бы выявленная нами суточная солнечная периодичность в колебаниях зенитных расстояний принадлежала только нашему инструменту, то и в этом случае полученные нами выводы следовало бы считать очень большим достижением: инструмент, накопивший в течение 70 лет до нас, до 1908 г., так много загадок в своих показаниях[2], вдруг выявил

[1] Известия Русского астр. об-ва, 1912 г.

[2] Загадки инструмента в их совокупности изложены Нюреном в X томе Пулковских Publications. 1903 г. Разгадка некоторых из загадок опубликована нами в 1928 г.

теперь так четко солнечную закономерность. Эта закономерность устраняет ту шаткость в выводах, которая чувствуется при чтении работ Нюрена, — это мы показали в приведенных в начале наших статей, этой (§ 1) и предыдущей, цитатах из работ Нюрена. Эта закономерность, если бы принадлежала только нашему инструменту, уже и в этом случае дает основания для пересмотра и переработки наново всех накопившихся старых наблюдений и старых выводов.

Однако мы имеем целый ряд признаков, указывающих, что суточная солнечная волна в зенитных расстояниях возникает не из инструмента и не из его местоположения. В предыдущей статье мы бегло показали, что вычисление суточной солнечной волны методом составления средних по отдельным часам истинного времени дает из наблюдений на пассажном инструменте и на зенит-телескопе совершенно одинаковые результаты, волну с весьма малой амплитудой.

Пассажный инструмент:

$\Delta z = 0''.033 \cos(\sigma - 14^h.1)$ из 1 482 набл. 1908—1911 гг. А. С. Васильева в 1913 г. (26)

$= 0.053 \cos(\sigma - 15.25)$ П. П. Логинов из набл. β Кассиопеи 1918—1928 гг. А. С. Васильева.

Зенит-телескоп:

$\Delta z = 0''.037 \cos(\sigma - 16.8)$. Исследования А. Д. Дрозда

$= 0.046 \cos(\sigma - 15.2)$ » Н. В. Циммермана. (27)

На зенит-телескопе за эту волну в виде выражения

$$\Delta\varphi = 0''.05 \cos(\sigma - 226^\circ) = 0''.05 \cos(\sigma - 15^h.07)$$

исправили мгновенные значения широты. Это действие мы считаем преждевременным и не достигающим никакой цели не только потому, что амплитуда выявленной нами суточной солнечной волны в действительности много больше, чем 0''.05, а потому, что само явление кратковременных колебаний в зенитных расстояниях само по себе много сложнее, чем изложено в нашем настоящем исследовании, и кроме того потому, что и в наблюдения и в выводы именно на зенит-телескопе оно входит весьма сложно. Все это мы покажем в особом специальном исследовании.

§ 23. Сложившаяся с 1868 г. обстановка препятствовала выявлению кратковременных колебаний. Амплитуда выявленной нами в (23) и в (24) суточной солнечной волны громадна сравнительно с амплитудами известных до сих пор колебаний широты, волн годовой и $14^1/_2$-месячной. С точки зрения различных вопросов астрометрии, с точки зрения задач точной геодезии и геофизики этот громадный размер амплитуды придает нашим выводам значение столь большое, столь важное, что вызывает ко всему нашему выводу даже в нас самих недоверие. Почему же столь большое суточное колебание не было

«Нереальная оценка точности нивеллирований горизонтальной оси в пассажных инструментах», Изв. Акад. Наук, 1928 г., стр. 151—172, 215—240, 303—318, 319—346, и «Условия надежного нивеллирования горизонтальной оси в пассажных инструментах», Изв. Акад. Наук, 1928 г., стр. 319—346.

замечено в Пулкове раньше, до нас? И если оно не есть свойство только пассажного инструмента в первом вертикале, то почему не выявляется как-либо его присутствие на других инструментах обсерватории, кроме упомянутого выше в формулах (27) слабого проявления на зенит-телескопе, проявления, установленного только в 1932 г., уже после наших настойчивых указаний, опубликованных в 1914—1919 гг.?

Все подробности по второму вопросу мы выделяем в специальное исследование, освещение же первому вопросу мы дали в начале предыдущей статьи, дали в начале этой статьи и также в наших работах, печатавшихся с 1912 г. В работе «70 лет истории Пулковского пассажного инструмента в первом вертикале» мы оказали, как относительно малочисленны были наблюдения на нашем инструменте до 1890 г. По цитатам, приведенным нами из работ Нюрена, мы видим, что кратковременные колебания в широте выявлялись инструментом с момента его установки, с 1840 г. Нюреном они были замечены: «Наблюдения, полученные почти одновременно, содержат приблизительно одинаковые остаточные ошибки», «эти ошибки зависят от суточного периода или от периода более короткого и, может быть, в них нет даже и никакой периодичности, а зависят они от случайных перемен температуры». Но Нюрен кратковременные колебания в широте, в зенитных расстояниях тогда принял за ошибки инструмента. Большую роль в этом сыграли перемены азимута, возникшие из несовершенной при Нюрене выверке инструмента, и также нереальная, призрачная, много превышавшая действительность, следовательно неправильная, оценка точности нивелирований горизонтальной оси,—оценка, установившаяся со времен В. Струве.

Случай наблюдений в 1893—1895 гг. на нитях, непараллельно стоявших к первому вертикалу, и настойчивые до настоящего времени (1935 г.) заверения того наблюдателя, что возникшие отсюда уклонения значений широты принадлежат природе, «аномалиям широты», «действиям боковой рефракции», наложившись на предыдущее, подорвали доверие к инструменту. Отсюда возник и вынужденный обрыв в 1911 г. нашей работы на инструменте, как только мы заявили о существовании кратковременных колебаний.

Вышеописанная сложная обстановка, еще бо́льшая сложность самого предмета исследований, необходимость до настоящего времени защищать безукоризненную работу инструмента—потребовали целый ряд дополнительных исследований, нами уже опубликованных. Мы выработали свой собственный метод исследования уровней (принят Палатою мер и весов СССР как стандартный), свой метод оценки точности нивелирований горизонтальной оси в пассажных инструментах, усовершенствовали точность отсчитываний показаний уровня, точность его установки на оси и многое другое. Теперь в двух исследованиях мы представляем выявление суточной солнечной волны в колебаниях широты места двумя совершенно различными методами. Эти все исследования потребовали труда, заняли некоторое время, но они и не бесполезны: они углубляют и наше знание инструмента и наше знание предмета исследований.

§ 24. Заключение. Явление кратковременных колебаний в широте места мы здесь представили в упрощенном виде, только в виде суточной солнечной волны. Реально все обстоит гораздо сложнее, и в дальнейшем нам предстоит вести работу одновременно по нескольким направлениям: 1) мы будем пытаться уточнять наше выражение суточной солнечной волны подбором надлежащего распределения наблюдений; 2) необходимо выяснить, отчего возникают перемены в амплитуде a и в фазе ν, только ли от

распределения наблюдений или и от перемен температуры, или и от сложения с суточной лунной волной и ее кратными; 3) уже в 1912—1913 гг. мы выявили, что кратковременные колебания состоят больше, чем из одной волны солнечной или лунной. Необходима разработка в этом направлении; 4) необходимо систематически собрать и представить те внешние признаки реального существования суточной солнечной волны, которые нам удалось подметить; не все упомянуты в настоящем исследовании; 5) необходимо подготовить и начать опубликование наших наблюдений в таких схемах, которые при требующейся теперь сжатости печатания обеспечивали бы собранному нами материалу возможность всяких и полных проверок. Некоторые части собранного нами материала нами еще совсем не обследованы, но это не значит, что они должны быть утеряны.

Все это следует делать возможно скорее, так как Академия Наук СССР организует службу широты по 52 параллели, а наши выводы могут иметь для целей и направления этой организации значение не безразличное.

Сказанное относится к нашим наблюдениям, уже полученным и вычисленным (по 1929,5 г.). Относительно же наблюдений дальнейших мы полагаем так: существование кратковременных закономерных колебаний в зенитных расстояниях ставит в необходимость основу этих исследований, наблюденные зенитные расстояния, опубликовывать возможно скорее после их получения, так как это представляет высокий интерес для работы каталожной и при определениях высокой точности для работы географической и геодезической. Сообразно с этим должна быть сорганизована и работа вычислений.

A. WASSILIEW. L'ONDE SOLAIRE DIURNE DANS LES OSCILLATIONS DE LA LATITUDE DE POULKOVO D'APRÈS LES DIFFÉRENCES DES DISTANCES ZÉNITHALES DE β CASSIOPÉE ET ι DRAGON OBSERVÉES PAR A. WASSILIEW EN 1918—1928 À. POULKOVO

RÉSUMÉ

En calculant les oscillations de la latitude de courte durée, soit avec la méthode de formation de moyennes heure par heure de temps spécial, soit par la juxtaposition, de telle façon ou de telle autre, des équations correspondant à des valeurs séparées des distances zénithales, nous nous heurtons inévitablement à l'influence exercée sur le résultat par des oscillations de la latitude de longue durée; cette influence peut occasionner certaines altérations des oscillations de courte durée tant pour la phase que pour l'amplitude.

Pour deux étoiles, chaque fois les mêmes, lorsque les observations en sont séparées par un intervalle de temps n'excédant pas deux fois vingt-quatre heures, nous avons dressé des listes de différences des distances zénithales. Pour ces différences nous avons les équations correspondantes renfermant les éléments des oscillations de courte durée—l'amplitude et la phase. De la sorte nous éliminions totalement l'influence des oscillations de longue durée, en particulier, celles des ondes annuelles et de $14^1/_2$ mois et la répercusion de notre connaissance insuffisamment exacte de la constante d'aberration et des parallaxes. C'est ce procédé que nous avons appliqué à nos observations des années 1918—1928 de β Cassiopée et de ι Dragon. Pour l'onde solaire diurne dans les oscillations de la latitude nous avons obtenu pour les différentes années prises séparément des expressions assez concordantes et en résumé pour le total des années:

$\Delta\varphi = 0''\!.161 \cos(\sigma - 11^h\!.55)$ tiré de 371 équations—différences.
$\pm 23 \qquad\qquad \pm 55$

Ce résultat est tout pareil aux expressions de l'onde solaire diurne obtenues par d'autres procédés et d'observations bien différentes:

$\Delta\varphi = 0''\!.134 \cos(\sigma - 12^h\!.7)$ tiré de 157 obs. de 7 étoiles en 1840—42
± 28

par W. Struve par le procédé de juxtaposition de distances zénithales observées par plusieurs en un jour.

$\Delta\varphi = 0''\!.033 \cos(\sigma - 14^h\!.1)$ tiré de 1482 observations par le procédé de juxtaposition de moyennes prises par angles horaires d'heure en heure.

Faute de ressources suffisantes pour les calculs nous n'avons pu mettre à profit qu'une partie fort restreinet de nos données d'observation.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathematiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

НОВЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА АБСОРПЦИИ УЛЬТРА-АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ГАЗАХ

Л. БЕЛЯВСКОЙ

(*Представлено академиком* **Л. И. Мандельштамом**)

Изучение абсорпции и дисперсии ультра-акустических волн в газах представляет значительный физический интерес. В частности, измерения коэффициента абсорпции (как и измерения дисперсии) позволяют делать ряд выводов о механизме и скорости обмена энергией между внутренними (колебательными) и внешними (поступательными) движениями молекул (1).

В течение последних лет рядом авторов были даны различные методы измерения коэффициента абсорпции ультра-акустических волн в газах (2). Значения коэффициентов абсорпции ультра-звуковых волн, даваемые различными авторами, содержат значительные расхождения. В связи с этим желательно продолжить с достаточной точностью и систематичностью измерения коэффициентов абсорпции в газах при различных условиях.

Метод измерения абсорпции, предлагаемый в настоящей работе, разработанный по идее акад. Л. И. Мандельштама, представляет на наш взгляд ряд преимуществ, так как позволяет получать достаточно точные результаты, при сравнительной простоте измерений и отсутствии сложных вычислений. Он позволяет также оценивать величину коэффициента отражения ультра-акустических волн на границе между газом и твердым телом.

В дальнейшем предполагается применить данный метод к изучению абсорпции ультра-звука в разных газах, в частности к исследованию зависимости абсорпции от давления. Здесь же дается лишь краткая теория метода и результаты опытов, имевших целью его проверку и разработку.

Наш метод сходен с методом Хаббарда (Hubbard) в том, что он также использует реакцию, испытываемую пьезо-кварцем со стороны возбуждаемого им столба газа; однако он существенно отличен от метода Хаббарда в том, *как* эта реакция используется для измерения абсорпции.

Теория. Пусть пластинка пьезо-кварца колеблется в направлении оси x, перпендикулярной к поверхности кварца, на расстоянии l, от которого находится рефлектор (металлическая пластинка), параллельный поверхности кварца.

Пусть колебания синусоидальны и u_0—амплитуда скорости на кварце ($x=0$). Амплитуда скорости в точке x равна

$$u = u_0 \frac{e^{k(l-x)} + \gamma e^{-k(l-x)}}{e^{kl} - \gamma e^{-kl}}, \tag{1}$$

где $k=\alpha+i\beta$; здесь α—коэффициент абсорпции (обратная величина расстояния, на котором амплитуда проходящей волны убывает в e раз),

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(λ—длина волны), γ—коэффициент отражения (отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей при $x=l$). Из (1) можно найти «акустическую» энергию W, отдаваемую 1 см^2 поверхности кварца в 1 сек. газу в функции α, β, γ, l. Введем параметр

$$\delta = \frac{2W}{u_0^2}, \tag{2}$$

пропорциональный дополнительному затуханию кварца, обусловленному отдачей энергии W. Из (1), (2) следует с точностью до членов порядка α/β

$$\delta = a\rho \cdot \frac{e^{2(\alpha l+\sigma')} - e^{-2(\alpha l+\sigma')}}{e^{2(\alpha l+\sigma')} + e^{-2(\alpha l+\sigma')} - 2\cos 2(\beta l+\sigma'')}, \tag{3}$$

где ρ—плотность газа, a—скорость звука,

$$\sigma' + i\sigma'' = \ln \gamma^{-\frac{1}{2}}$$

[формулу (3) можно получить хотя бы методом, указанным в работах Хаббарда].

Предлагаемый метод для определения α связан с изучением хода изменения δ как функции от l. Он основан на следующих соображениях.

При изменении l [«интерферометр» Пирса (3)] значения δ проходят через максимумы

$$\delta_{max} = \delta_\infty \operatorname{cth}(\alpha l + \sigma')$$

и минимумы

$$\delta_{min} = \delta_\infty \operatorname{th}(\alpha l + \sigma'),$$

где

$$\delta_\infty = a\rho.$$

Максимумы и минимумы чередуются через промежутки $\lambda/_4$.

δ_{max} соответствует резонансу акустического столба, δ_∞ — отсутствию отраженной волны. Заметим, что при $l \gg \frac{\lambda}{4}$ для соседних максимума и минимума имеет место соотношение

$$\delta_\infty = \sqrt{\delta_{max} \cdot \delta_{min}}.$$

Если кварц колеблется в осцилляторной схеме Пирса, изменение l вызывает изменение анодного тока J. При достаточно малых изменениях δ можно считать зависимость J от δ практически линейной (см. ниже). Пусть условия опыта таковы, что можно пренебречь σ' перед αl. В этом случае, измерив токи J_{max} и J_{min}, соответствующие соседним максимуму

и минимуму δ (при $l \gg \lambda/_2$), и ток J_∞ при рефлекторе, «удаленном в бесконечность», легко вычислить α из формулы

$$\frac{J_{\max} - J_\infty}{J_\infty - J_{\min}} = \frac{\delta_{\max} - \delta_\infty}{\delta_\infty - \delta_{\min}} = \operatorname{cth} \alpha l.$$

Учитывая же неполное отражение, мы получим формулу

$$\frac{J_{\max} - J_\infty}{J_\infty - J_{\min}} = \frac{\delta_{\max} - \delta_\infty}{\delta_\infty - \delta_{\min}} = \operatorname{cth} (\alpha l + \sigma').$$

Откладывая по оси абсцисс расстояние l, а по оси ординат

$$\operatorname{arc} \operatorname{cth} \frac{J_{\max} - J_\infty}{J_\infty - J_{\min}},$$

мы получим прямую, наклон которой даст коэффициент абсорпции α, а ордината при $l=0$ величину σ', зная которую мы найдем $|\gamma|$.

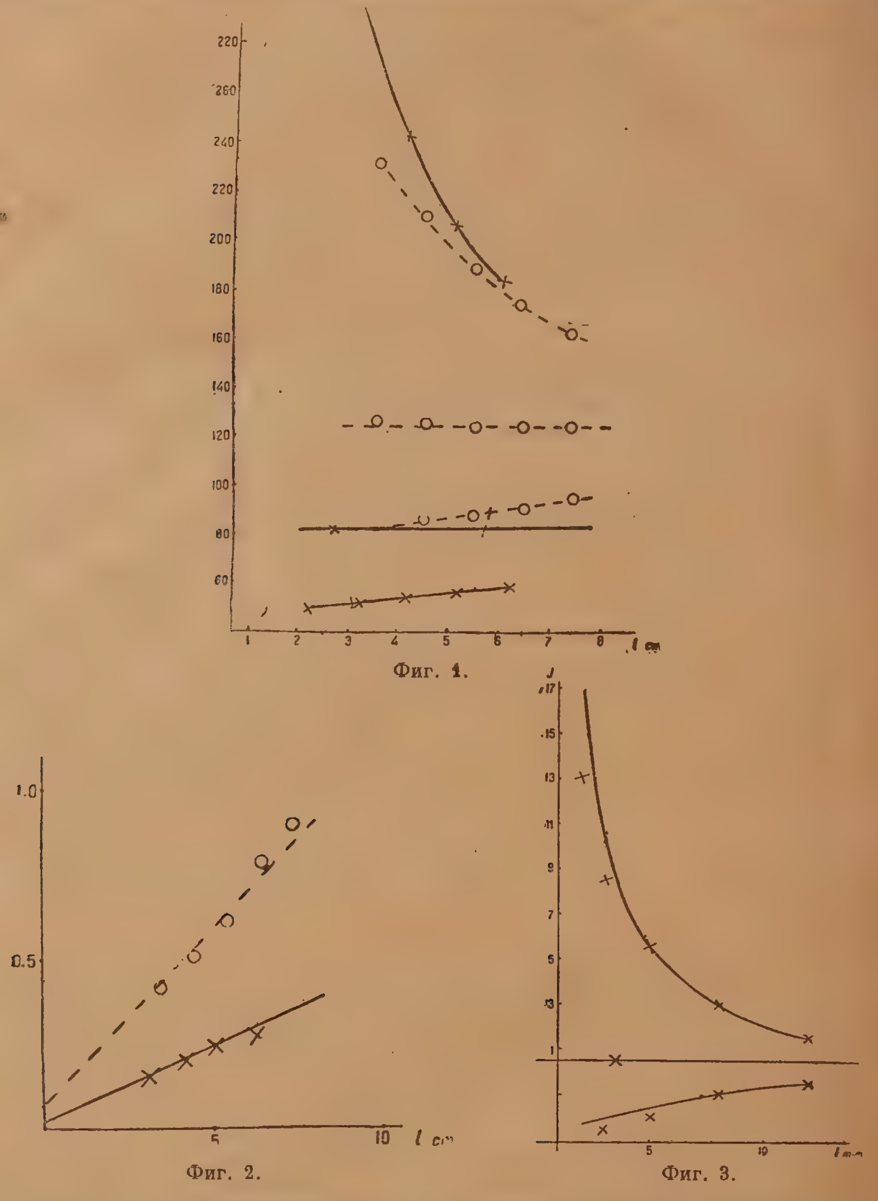
Экспериментальная установка. Кварц с посеребренной верхней поверхностью помещался на столик микроскопа Цейса, объектив которого был заменен рефлектором (латунным диском). Такое устройство позволяло сохранять при перемещении рефлектора достаточно строгую параллельность между его поверхностью и поверхностью кварца. (Параллельность проверялась оптически.) Измерения $J_\infty - J_{\min}$ производились микроамперметром, $J_{\max} - J_\infty$ — прибором с ценой деления 10^{-5} А (применялась компенсация). Режим кварца контролировался методом «повторных биений». Для нахождения J_∞ при слабой абсорпции отраженная волна уничтожалась поглощением, для чего рефлектор покрывался гофрированной фланелью, или отклонялась в сторону наклонной пластинкой. Оба метода давали одинаковый результат. Линейность функции $J = J(\delta)$ проверялась посредством шунтирования кварца большим омическим сопротивлением R. Было установлено, что ΔJ практически пропорционально $^1/_R$ в области, в которой производились измерения. При работе с разреженным воздухом и CO_2 интерферометр помещался под колокол воздушного насоса. Управление прибором осуществлялось посредством нитей, проходящих через барометрические трубки.

Результаты. Критерием применимости приведенных выше соображений может служить сравнение экспериментального хода кривых $J_{\max}(l)$, $J_{\min}(l)$ с теоретическим, или, что сводится к тому же, линейная зависимость $\operatorname{arc} \operatorname{cth} \frac{J_{\max} - J_\infty}{J_\infty - J_{\min}}$ от l.

Экспериментальные кривые $J_{\max}(l)$, $J_{\min}(l)$, а также значения J_∞ для комнатного воздуха при атмосферном давлении и при частотах $\nu = 600\,000$ (пунктирные кривые) и $\nu = 375\,500$ (сплошные кривые) приведены на фиг. 1. Соответствующие графики, дающие $\operatorname{arc} \operatorname{cth} \frac{J_{\max} - J_\infty}{J_\infty - J_{\min}}$ как функцию от l, даны на фиг. 2; получается хорошее согласие с линейностью, требуемой теорией.

Фиг. 3 дает экспериментально полученные значения $J_{\max}(l)$, $J_{\min}(l)$, J_∞ для CO_2 при нормальном давлении и теоретические кривые, проведенные через точки, соответствующие большим l. Как видно из рисунка, при малых l экспериментальные значения заметно отклоняются от теоретических. Такое же расхождение между теорией и экспериментом при малых l было замечено и в ряде других случаев.

Величина искажения и максимальное расстояние, на которое оно распространяется, сильно зависят от режима, в котором колеблется кварц[1].



Фиг. 1.

Фиг. 2.

Фиг. 3.

Наоборот, на достаточно большом расстоянии от кварца ход кривых не зависит от режима, хорошо воспроизводим и совпадает с теоретическим.

[1] На существование аномальных явлений вблизи кварца указывает ряд авторов.

Все эти обстоятельства показывают, что для малых l мы имеем дело с побочными явлениями, не учитываемыми теорией, но не препятствующими применению указанных формул для больших l.

Можно довольно естественным образом объяснить факт наличия явлений вблизи кварца, которые, с одной стороны, вызывают наблюдаемые аномалии, а с другой,—не влияют на ход кривых для больших l.

Экспериментальное выяснение этих явлений предполагается в дальнейшем произвести. Но совокупность изложенных выше экспериментальных данных даст все основания, как уже было указано выше, пользоваться приведенным методом для определения затухания, принимая конечно указанные предосторожности. Это последнее замечание относится впрочем и к другим известным уже методам.

Приводим сводку некоторых из полученных результатов.

	Частота Fréquence	t^0	α	$A = \alpha\lambda^2$	γ
Комнатный воздух при атмосферном давлении / Air de chambre; pression atmosphérique	375 500	24	0.044	0.000370	0.95
	425 500	21.5	0.061	0.000397	0.93
	491 000	21.5	0.082*	0.000402	—
	600 000	21.5	0.107	0.000383	0.91
	750 000	21.5	0.190*	0.000399	—
CO_2 при атмосферном давлении / CO_2, pression atmosphérique	600 000	13	0.76		0.98

Примечание. Результаты, отмеченные знаком *, мы считаем менее надежными, чем остальные.

Note. Les résultats marqués de l'astérisque sont moins sûrs que les autres.

Результаты измерений для воздуха достаточно хорошо удовлетворяют закону

$$A = \alpha\lambda^2 = \text{const},$$

причем значение A мало отличается от величины 0.000365, полученной Неклепаевым (2). Сравнения с результатами других авторов мы не приводим, так как наши опыты имели целью лишь проверку самого метода измерений.

Часть экспериментальной работы проведена при участии К. С. Семенова.

В заключение выражаю благодарность акад. Л. И. Мандельштаму за руководство работой, а также С. Э. Хайкину и Г. С. Горелику за ряд ценных указаний.

Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета.
Лаборатория колебаний.

L. BELAVSKAJA. UNE NOUVELLE MÉTHODE POUR MESURER LES COEFFICIENTS D'ABSORPTION DES ULTRA-SONS DANS LES GAZ

RÉSUMÉ

Les mesures de l'absorption des ondes ultra-sonores dans les gaz présentent un intéret physique considérable. Elles peuvent notamment (de même que les mesures de la dispersion) donner des renseignements précieux sur la rapidité et le mécanisme des échanges d'énergie entre les mouvements de translation des molécules et leurs mouvements internes (oscillations) (1). On a proposé au cours des dernières années plusieurs méthodes de mesure de l'absorption ultra-sonore dans les gaz (2). Mais il existe des désaccords considérables entre les valeurs des coefficients d'absorption données par différents auteurs. C'est pourquoi il est désirable de poursuivre, en variant les conditions, des mesures suffisamment exactes et systématiques des coefficients d'absorption ultra-sonore dans les gaz.

La méthode de mesure du coefficient d'absorption proposée ici—l'idée en a été donnée par L. Mandelstam—possède à notre avis certains avantages. Elle permet d'obtenir des résultats assez précis sans manipulations compliquées ni longs calculs. Cette méthode permet également d'évaluer le coefficient de réflexion des ondes ultra-sonores à la frontière d'un gaz et d'un corps solide.

Nous indiquons ici en toute brièveté la théorie de la méthode et les résultats des expériences entreprises pour la vérifier et la mettre au point. Elle sera appliquée par la suite à l'étude systématique de l'absorption des ultra-sons dans différents gaz et en particulier de la variation de l'absorption en fonction de la pression.

Comme le procédé de Hubbard, le nôtre a pour base la réaction exercée sur le quartz par la colonne gazeuse qu'il excite. Mais nous utilisons cette réaction d'une manière différente.

T h é o r i e. Soit un quartz piézo-électrique exécutant des vibrations sinusoïdales dans la direction de l'axe x, perpendiculaire à sa surface, à la distance l de laquelle est placé un réflecteur métallique plan parallèle à cette surface.

Soit u_0 l'amplitude de la vitesse sur le quartz ($x=0$); l'amplitude de la vitesse au point x

$$u = u_0 \frac{e^{k(l-x)} - \gamma e^{-k(l-x)}}{e^{kl} - \gamma e^{-kl}}, \tag{1}$$

où $k = \alpha + i\beta = \alpha + i\frac{2\pi}{\lambda}$, λ étant la longueur d'onde, α—le coefficient d'absorption (l'inverse de la distance sur laquelle l'amplitude d'une onde progressive diminue dans le rapport $1:e$), et γ—le coefficient de réflexion (quotient de l'amplitude de l'onde réfléchie par celle de l'onde incidente à la surface du réflecteur).

On peut calculer en partant de (1) l'énergie «acoustique» W rayonnée en 1 sec. par 1 cm² de surface du quartz, en fonction de α, β, γ, l. Introduisons le paramètre

$$\delta = \frac{2W}{u_0^2}; \tag{2}$$

proportionnel à l'amortissement supplémentaire du quartz dû à la perte d'énergie W. On peut déduire de (1) et (2), en négligeant les termes de l'ordre de α/β:

$$\delta = a\rho \cdot \frac{e^{2(\alpha l+\sigma')} - e^{-2(\alpha l+\sigma')}}{e^{2(\alpha l+\sigma')} + e^{-2(\alpha l+\sigma')} - 2\cos(\beta l + \sigma'')} \tag{3}$$

ρ étant la densité du gaz, a—la vitesse de propagation du son,

$$\sigma' + i\sigma'' = \ln \gamma^{-\frac{1}{2}}$$

Un des procédés permettant d'effectuer ce calcul est indiqué dans les travaux de Hubbard (2)].

La méthode que nous proposons pour déterminer α est basée sur les considérations qui suivent.

l variant [«interféromètre» de Pierce (3)], δ passe par une série de maxima

$$\delta_{max} = \delta_\infty \operatorname{cth}(\alpha l + \sigma'),$$

alternant avec les minima

$$\delta_{min} = \delta_\infty \operatorname{th}(\alpha l + \sigma').$$

$\delta_\infty = a\rho$ est la limite de δ pour $l = \infty$. Remarquons que si $l \gg \frac{\lambda}{4}$ on a pour un maximum et un minimum voisins

$$\delta_\infty = \sqrt{\delta_{max} \cdot \delta_{min}}\,.$$

δ_{max} correspond aux résonances de la colonne gazeuse et δ_∞—à l'absence d'onde réfléchie.

La variation de δ entraîne une variation du courant de plaque J du triode qui entretient les vibrations du quartz. (Dans nos expériences le quartz était monté en oscillateur). On peut faire les variations de δ assez petites pour que J soit pratiquement une fonction linéaire de δ (v. plus bas). Supposons de plus que σ' est négligeable par rapport à αl. Il suffit alors pour connaître α de mesurer un maximum J_{max} et un minimum J_{min} du courant de plaque, assez rapprochés pour que l'on puisse confondre les valeurs respectives de l, ainsi que la valeur J_∞, que prend le courant lorsque le réflecteur est «éloigné à l'infini». En effet

$$\frac{J_{max} - J_\infty}{J_\infty - J_{min}} = \frac{\delta_{max} - \delta_\infty}{\delta_\infty - \delta_{min}} = \operatorname{cth} \alpha l.$$

Si la réflexion n'est pas complète on a

$$\frac{J_{max} - J_\infty}{J_\infty - J_{min}} = \frac{\delta_{max} - \delta_\infty}{\delta_\infty - \delta_{min}} = \operatorname{cth}(\alpha l + \sigma').$$

Portant sur l'axe des abscisses les valeurs de l et sur l'axe des ordonnées celles de $\operatorname{arc\,cth} \frac{J_{max} - J_\infty}{J_\infty - J_{min}}$, on obtiendra une droite, dont la pente donnera α et l'ordonnée initiale σ'.

D i s p o s i t i f e x p é r i m e n t a l. Des quartz à face supérieure métallisée étaient posés sur la plateforme d'un microscope Zeiss, dont l'obje-

ctif était remplacé par un disque de laiton. Grâce à ce dispositif la surface du réflecteur pouvait être déplacée tout en restant parallèle, avec une exactitude suffisante pour nos expériences, à celle du quartz. Un procédé de compensation permettait de mesurer $J_\infty - J_{min}$ au microampèremètre et $J_{max} - J_\infty$ à l'aide d'un instrument dont la sensibilité était de 10^{-5} A par division. Le régime oscillatoire était contrôlé par la méthode des «battements secondaires». Pour mesurer J_∞ lorsque l'absorption était faible je supprimais l'onde réfléchie par absorption, en recouvrant le réflecteur avec de la flanelle gaufrée, ou je la faisais dévier en employant un plan réflecteur incliné. Les deux méthodes donnent le même résultat. Le caractère linéaire de la fonction $J = J(\delta)$ était vérifié en shuntant le quartz par une grande résistance ohmique R. Dans le domaine utilisé pour les mesures d'absorption J variait pratiquement comme $\frac{1}{R}$. Pour les mesures dans l'air raréfié et dans CO_2 l'interféromètre était placé sous une cloche pneumatique; la manoluvre s'effectuait à l'aide de fils traversant des tubes barométriques.

Résultats. Un critérium qui permet de vérifier nos considérations est la conformité des courbes expérimentales $J_{max}(l)$, $J_{min}(l)$ aux formules théoriques, ou, ce qui revient au même, le caractère linéaire de la variation de

$$\operatorname{arc\,cth} \frac{J_{max} - J_\infty}{J_\infty - J_{min}}$$

en fonction de l.

La fig. 1 donne pour deux expériences faites dans l'air de chambre à la pression atmosphérique aux fréquences $\nu = 375\,000$ (courbes à trait plein) et $\nu = 600\,000$ (courbes pointillées) les valeurs mesurées de J_{max} et J_{min} qui correspondent à différentes valeurs de l. La fig. 2 donne pour les mêmes mesures $\operatorname{arc\,cth} \frac{J_{max} - J_\infty}{J_\infty - J_{min}}$ en fonction de l. On constate un accord satisfaisant avec le caractère linéaire qu'exige la théorie.

La fig. 3 reproduit les résultats expérimentaux obtenus dans CO_2 à la pression atmosphérique. Nous avons tracé sur cette figure les courbes théoriques passant par les points expérimentaux qui correspondent à de grandes valeurs de l. On remarque que lorsque l est petit, les points expérimentaux s'écartent sensiblement des courbes théoriques. Nous avons remarqué en d'autres cas également des écarts analogues dans les mesures effectuées lorsque le réflecteur est peu éloigné du quartz.

La grandeur de l'écart entre les courbes théoriques et expérimentales et de la région où cet écart existe dépend du régime oscillatoire du quartz.[1] Par contre, lorsque la distance du quartz au réflecteur est suffisamment grande les courbes expérimentales ont un aspect qui ne dépend pas du régime, se reproduisent bien et sont conformes à la théorie. Ces circonstances montrent que l étant petit il se produit certains phénomènes dont notre théorie ne rend pas compte, mais qui n'empêchent pas nos formules d'être applicables pour les grandes valeurs de l.

On peut expliquer d'une façon assez plausible l'existence à proximité du quartz de phénomènes qui, d'une part, engendrent les anomalies observées et, d'autre part, n'affectent pas la marche des courbes pour les grandes valeurs de l.

Des expériences seront entreprises pour élucider la nature de ces phé-

[1] L'existance d'anomalies à proximité du quartz est signalée par plusieurs auteurs.

nomènes. Mais l'ensemble des données expérimentales permet d'ores et déjà d'utiliser, moyennant certaines précautions, la méthode exposée ici pour mesurer les coefficients d'absorption. Remarquons que toutes les méthodes connues à ce jour ne sont pas sans nécessiter des précautions analogues.

Quelques résultats déduits d'expériences faites pour des valeurs suffisamment grandes de l sont reproduits dans notre tableau (v. texte russe de cette note).

Pour l'air ces résultats obéissent d'une façon satisfaisante à la loi

$$A = \alpha\lambda^2 = \text{const};$$

A différant peu de la valeur 0.000365 obtenue par Neklepajew (2). Nous ne faisons pas de comparaisons avec les résultats d'autres auteurs, car, nous le répétons, nos expériences n'avaient pour but que de vérifier la méthode.

Une partie des expériences a été effectué avec le concours de K. Semionov.

Je tiens à exprimer ma gratitude au prof. L. Mandelstam qui m'a dirigée dans ce travail ainsi qu'à S. Chaikin et G. Gorelik à qui je dois de nombreux conseils.

Institut de Physique
de l'Université de Moscou.
Laboratoire des Oscillations.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kneser, Ann. der Phys., **11**, 777, 1931; **16**, 369, 350.—Rutgers, Ann. der Phys., **16**, 350.
2. Neklepajew, Ann. der Phys., **35**, 175, 1911.—Abello, Phys. Rev., **31**, 1083, 1928.—Pielemeier, Phys. Rev., **34**, 1184, 1929.—Grossman, Ann. der Phys., **13**, 681, 1932.—Hubbard, Phys. Rev., **38**, 1011, 1931; **41**, 523, 1932; **46**, 525, 1934.—Herzberger, The Journ. of the Ac. Soc. of Am. № 4, 273, 1933.
3. Pierce, Proc. Am. Acad., **60**, 269, 1925.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ПЕРИОД ВЕКОВЫХ ИЗМЕНЕНИЙ МАГНИТНОГО СКЛОНЕНИЯ

Б. П. ВЕЙНБЕРГА и К. Б. ВЕЙНБЕРГА

(*Представлено академиком* П. П. Лазаревым)

Из наблюдений географических элементов, могущих способствовать выяснению вопросов глубинной геологии (в частности изменений, происходящих в земной коре), раньше всего начались определения магнитных элементов, а из них—с конца XV в.—магнитного склонения. Для тех пунктов, для которых имеются достаточно длинные ряды наблюдений, обнаруживается отчетливая периодичность—с периодом около полутысячелетия. То же дают кривые изменения склонения [например, Säkular Kurven Ван-Беммелена (1) для равноотстоящих—в угловой мере—точек на поверхности земного шара] для тех районов, где изменения склонения велики и для которых можно было найти достаточное количество старинных определений.

Вопросы о том, какова величина периода изменений склонения для различных частей земной поверхности и одинакова она или различна, не получили до сих пор однозначного решения. В виду того, что за последнее время были выявлены дополнительные материалы по значениям склонения в прежние эпохи на территории СССР (2,3) и в полярных областях (4), не использованные при предшествовавших попытках, мы попробовали пересмотреть вопрос о периоде вековых изменений склонения, применяя при этом иную методику.

По примеру Ван-Беммелена мы относили весь наблюдательный материал к равноотстоящим точкам (через 10° долготы и 20° широты от 60°S до 60°N и через 10° широты—от 60°N до 80°N). Для каждой из них строился график изменений D в зависимости от времени t путем нанесения отдельных точек из таблиц и карт Галлея (5), Маунтэна и Додсона (6), Кратценштейна (7) (отчасти), Ганстэна (8), Неймайера (9), Ван-Беммелена (1,10), Германской морской обсерватории (11) и Омери (12). Данные, относящиеся к СССР (2,3) и к Арктике (4), приводились предварительно к равноотстоящим точкам при помощи градиентов склонения по широте и по долготе, снятых с наиболее близкой по эпохе карты изогон. Затем проводилась от руки плавная кривая, проходящая возможно ближе к наиболее достоверным из нанесенных точек, и из нее находился период изменений склонения по предложенному одним из нас методу (13) [использование кроме основной кривой $D = f(t)$ еще кривой $D' = f'(t)$ и отыскание по методу равных высот эпох, соответствующих экстремумам этих кривых, а по абсциссам, соответствующим $D' = 0$,—эпох перехода склонения через среднее значение]. С тех же графиков снимались—в тех случаях, когда

это было возможно,—экстремальные (D_{max} и D_{min}) и среднее (D_0) значения склонения.

В качестве предварительной обработки выписанные в общую исходную таблицу значения склонения D_{max}, D_0 и D_{min} и эпох t_{max}, t_0 и t_{min} (с отметками — $+$ и $\overset{+}{+}$ — менее достоверных и еще более сомнительных их значений) сглаживались (с весами 1, 2, 1—кроме мест очевидных экстремумов—или уменьшенными в 2 и 4 раза при наличности пометок $+$ и $\overset{+}{+}$): 1) по широтам и 2) по долготам, и из полученных двух сглаженных значений бралось взвешенное среднее. Полученные средние оказались сравнительно мало отличающимися от исходных значений—в среднем на $\mp 2°$ (меньше при малых широтах, больше—при больших) для D и на ∓ 9 лет для эпох.

Вычисленные по значениям t_{max}, t_0 и t_{min} величины

$$|t_{max}-t_0|, \quad |t_0-t_{min}| \quad \text{и} \quad \left|\frac{t_{max}-t_{min}}{2}\right|$$

представляют в случае периодичности изменений D четверть периода T этих изменений. Так как распределение значений $\frac{1}{4}T$ по изученной нами части земной поверхности оказалось лишенным каких-либо бросающихся в глаза закономерностей, то это позволило считать их различие имеющим случайный характер и признать законным их осреднение, давшее следующие результаты.

Таблица 1 — Table 1

Осредненные первоначальные значения $^1/_4\,T$ и средние отклонения единичных их значений.

Averages of initial values of $^1/_4\,T$ and mean deflections of their individual values.

φ \ λ	0—150°	160—350°	0—350°
80N—20°N	151∓17	145∓22	148∓20
0—60.°5	142∓26	143±24	142∓25
80N—60.°5	148∓20	144∓23	147∓20

Отсюда видно, что в первом приближении период изменения склонения одинаков на всем земном шаре и близок к 600 годам.

Основываясь на этом, можно было заполнить все пробелы исходной таблицы по отношению к недостававшим во многих ее подразделениях значениям t_{max}, t_0 или t_{min} (за исключением точки $\varphi = 70°$, $\lambda = 260°$, близкой к северному магнитному полюсу), сначала только интраполируя по φ или по λ (в тех случаях, когда протяжение пробелов в этих направлениях не было большим), а затем, прибегая к экстраполяции (в тех случаях, когда в одном из подразделений нехватало одного или двух из эпох t_{max}, t_0 и t_{min}), путем прибавления ± 150 или ± 300.

Полученные ряды эпох t_{max}, t_0 и t_{min} путем прибавления к ним $\pm n.150$, где n—целое число, и осреднения (при котором значениям t_0 придавался удвоенный вес, а величинам, полученным интра- или экстраполяцией, вес уменьшался в 2 и в 4 раза) были сведены к единой системе эпох $\overline{T}_0$ перехода склонения через среднее значение D_0, соответствующих у в е-

ТАБЛИЦА 2 TABLE 2

Распределение средних значений эпохи $\overline{t_0}$ перехода склонения D через среднее значение $\overline{D_0}$ одной четверти периода T и амплитуды A_0 изменений D.

Distribution of mean volues of the epoch $\overline{t_0}$ of passing of the declination D over the mean value $\overline{D_0}$ of one quarter of the period T and of the amplitude D_0 of the variation of D.

		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
80°N	$\overline{t_0}$	1931	1891+	1845	1834+	1769	1736	1757+	1745	1745+	1742+	1729+	1712
	1/4 T	151+	104±	118+	163±	114+	150	180±	170	179±	178±	170±	154+
	$\overline{D_0}$	−18+	−16+	−12+	− 9	− 7	− 4+	− 2	+ 4+	+ 6+	(+10+)	+ 9+	+ 8
	A_D	15+	8+	9+	9	19	21+	25+	24±	25±	(23+)	22+	27
70°N	$\overline{t_0}$	1989	1981	1947	1897	1818	1787	1771	1741	1759	1756	1743	1711+
	1/4 T	146	127+	154±	143	154	152	158	173+	167+	153+	148+	135±
	$\overline{D_0}$	−12	− 9	− 5	− 3	+ 1	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 4	+ 4	+ 2
	A_D	15	12	10	9	11	16	19+	22+	19	17+	14+	9+
60°N	$\overline{t_0}$	1992	1981	1952	1916	1834	1801	1782	1765	1756	1752	1742	1708
	1/4 T	138	144	146	166	129+	151	150	151+	156+	150+	136+	149+
	$\overline{D_0}$	− 9	− 5	− 2	+ 0	+ 1	+ 1	+ 0	− 1	− 0	− 1	0	− 1
	A_D	18	16+	(13)	(11)	10	14	16+	17+	15+	13+	9+	5
40°N	$\overline{t_0}$	1988	1978	1966	1914	1852	1818	1786	1760	1750	1750	1732	1672+
	1/4 T	121+	110+	117+	149+	141+	160+	155+	146+	153	148	142	154±
	$\overline{D_0}$	− 7	− 6	− 4	− 2	− 1	− 2+	− 3	− 5	− 4	− 3	− 2	− 3
	A_D	15	13+	12	(10)	10	11±	12+	12+	11	10+	6	3
20°N	$\overline{t_0}$	2000	1978	1953	1914	1864	1820	1779	1742	1730	1733	1737	1745+
	1/4 T	113	114	122	135	144	182	185+	145+	158+	147	142+	140±
	$\overline{D_0}$	− 7	− 7	− 6	− 6	− 6	− 6	− 8	− 7	− 6	− 4	− 2	− 0+
	A_D	12+	11+	10+	(11+)	(10+)	9+	9+	9+	8+	7+	5+	2
0°	$\overline{t_0}$	2007	1985	1963	1940	1855	1802	1760	1718	1720	1708	1735	1778
	1/4 T	142	133	139	97+	143	140+	153	134+	129+	139+	132	125+
	$\overline{D_0}$	− 8	− 8	− 8	− 9	− 9	−10	−12	−10	− 8	− 6	− 2	− 1
	A_D	13	12+	11	10+	9+	8+	9	9+	9	7+	4	2
20°S	$\overline{t_0}$	2039	2008	1992	1978	1893	1825	1756	1708	1618	1668	1705+	1732+
	1/4 T	174+	156+	145+	96+	154	141	143	155+	150	140+	128±	137±
	$\overline{D_0}$	− 8	−10	−12	−13	−14	−15	−15	−16+	−13	−12	− 7	− 5
	A_D	17+	15+	14+	12+	(7)	(6)	7+	7±	8+	(8+)	4+	3
40°S	$\overline{t_0}$	2054	2036	2021	2002	1987	2007+	1548+	1587	1602	1615	1630	1691
	1/4 T	172+	174	164	150	152+	147±	136±	125+	124	132	126	149+
	$\overline{D_0}$	− 8	−10	−12	−16	−16	−23	−22+	−22	−21	−25	−18	−14
	A_D	19+	19+	17	15	14	8+	5±	(4)	7	11+	8+	4
60°S	$\overline{t_0}$	2100	2094	2079	2056	2024	2017	2028	2082+	2085+	2071+	2086+	2098+
	1/4 T	136	149	133	120	147+	153+	153+	152+	150±	156±	157±	154±
	$\overline{D_0}$	−12	−16	−20	−23	−26	−29	−34	−39	−40+	−36	−32+	−35
	A_D	14	13	12	11	(11)	(9+)	10+	9+	10±	13+	5±	5+

		120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240
80°N	$\overline{t_0}$	1696+	1682+	1676	1658	1641	1629	1604	1583+	1590+	1587+	1613+	1600+	1601+
	1/4 T	139+	135+	146	145	149	134+	144	144+	148±	159±	143±	151±	151±
	$\overline{D_0}$	+ 9	+10	+11	+17	+23	+28	+37	+45	+51	+62	+75+	+91+	+96+
	A_D	20	19+	19	17+	16	(17+)	14	12	13	13+	20+	29+	48+
70°N	$\overline{t_0}$	1650	1598	1567+	1560+	1573	1586	1578	1576	1590	1599	1655	1699	1713
	1/4 T	143	171	170+	152±	137+	119+	176	176+	162+	172+	157+	167+	166
	$\overline{D_0}$	+ 0	− 0	+ 1	+ 5	+10	+14	+20	+25	+30	+34	+39	+38	+33
	A_D	8	9	8	11+	12+	12+	10+	8+	8+	8	11+	19+	36
60°N	$\overline{t_0}$	1621+	1569+	1545+	1546	1555	1539	1545	1593+	1608	1644+	1706+	1741	1746+
	1/4 T	168±	165±	153±	145+	156	154	165	157±	148	142+	148+	130+	160±
	$\overline{D_0}$	− 5	− 6	− 4	+ 1	+ 5	+10	+16	+19	+22	+24	+23	+21	+18
	A_D	7+	9+	(9+)	10	10	9	7	7+	6	6	11	16+	18+
40°N	$\overline{t_0}$	1554	1525	1520	1510	1507	1494	1498	1603+	1654+	1718	1741	1762	1764
	1/4 T	141+	150+	156+	146+	156+	154+	135+	135+	143+	162	144	156	160
	$\overline{D_0}$	− 3	− 2	+ 0	+ 2	+ 6	+10	+13	+13	+12	+12	+10	+12	+11
	A_D	4	5+	6	8+	7+	6+	4	(4)	(4)	(6)	9+	8	9
20°N	$\overline{t_0}$	1754	1735	1739	1738+	1748	1736+	1702+	1705+	1724+	1745+	1725+	1750+	1766
	1/4 T	132	128	140	147±	146	156±	140±	138±	131±	167±	178±	164±	159
	$\overline{D_0}$	+ 1	+ 2	+ 4	(+6)	+ 9	+11	+12+	+11+	+ 8+	+ 7+	+ 4+	+ 5	+ 6
	A_D	(2)	3	4	(5)	5	4+	2+	1+	2+	5+	6+	7+	6+
0°	$\overline{t_0}$	1832	1734	1715	1734	1754+	1744	1702+	1679+	1715+	1751	1730	1746+	1754
	1/4 T	119±	106	118	136	139±	148+	114±	130±	152±	154	151	148±	158
	$\overline{D_0}$	+ 1	+ 3	+ 4	+ 7	+10	+10	+ 9	+ 8	+ 6	+ 4	+ 3	+ 2	+ 2
	A_D	2+	2	(2)	2+	2	2	(1)	(1+)	3+	4	5	5	6+
20°S	$\overline{t_0}$	1811	1797+	1803+	1795	1772	1772	1772	1778	1776	1792	1779	1776	1795
	1/4 T	103+	94+	96±	119+	129	119+	131+	132+	140±	141±	148±	146±	153±
	$\overline{D_0}$	− 2	+ 1+	+ 4+	+ 7	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9+	+ 8+	+ 7+	+ 5	+ 4	+ 5
	A_D	(2)	(2+)	(2+)	1+	2+	2+	2+	2±	3±	4±	5+	6±	7+
40°S	$\overline{t_0}$	1705	1717	1733	1747	1745+	1763+	1782+	1812	1846+	1893	1888	1858	1837
	1/4 T	182+	161+	156+	175+	177±	192±	151±	148	168±	139+	136+	142+	132
	$\overline{D_0}$	−13	− 6	− 0	+ 6	+10	+12+	+14+	+15	+14	+15	+14	+13	+11
	A_D	7	5	6	(5)	4+	4+	3+	5	6+	8+	9+	10+	10+
60°S	$\overline{t_0}$	1608	1668	1701	1729+	1777+	1807+	1875+	1875+	1914+	1920+	1900	1881	1866
	1/4 T	137	161+	156+	160±	176±	171±	157±	147±	169±	161±	158+	140	134
	$\overline{D_0}$	−27	−16	− 4	+ 6	+14	+19	+23	+27	+29	+28	+25	+21	+20
	A_D	11+	9	10+	9+	8+	7	8+	14+	17+	18+	17+	15	15+

		250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	360
80°N	$\overline{t_0}$	1552+	1452	1435	1422	1405	1400	1387	1380	1378	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	1/4 T	156±	179+	155	154+	140±	127+	143	152	155	155	154	151+
	$\overline{D_0}$	(−3)	−117+	(−99+)	−86	(−75+)	−73+	−62	−51	−39	−31+	−26+	[illegible]
	A_D	27+	51+	(37+)	28	(28+)	17+	20	20	20	13	15+	[illegible]
70°N	$\overline{t_0}$	[illegible]	—	1440	1435	1424	1405	1391	1386	1386	1387	[illegible]	[illegible]
	1/4 T	142	—	127	132	134+	144+	151+	160+	158+	150	153	[illegible]
	$\overline{D_0}$	+31	—	−62	−64	−58	−53	−45	−36	−29	−22	−17+	−12
	A_D	39	—	24	23	24	22+	24+	25+	25+	22+	19±	15
60°N	$\overline{t_0}$	1762	1759	1745	1382+	1405	1430	1409	1412	1411	1412	1393	1393
	1/4 T	134+	128+	122+	128±	147	135+	149	145	139+	142	132	138
	$\overline{D_0}$	+10	+ 4	− 8	−30	−34	−36	−32+	−26	−23+	−19	−13	− 9
	A_D	26+	18+	11+	(12+)	17+	19+	22+	22+	22+	18+	19	18
40°N	$\overline{t_0}$	1762	1745	1723	1688	1331	1390	1346	1457	1439	1419	1405	1388
	1/4 T	144	130	121	114	146	157+	162+	143	148	139	127	121+
	$\overline{D_0}$	+ 9	+ 5	− 2	− 3	−11	−15	−16	−15	−12	−10	− 8	− 7
	A_D	10	9+	8	6	8	10	12+	14	14+	16	16	15
20°N	$\overline{t_0}$	1772	1759+	1703	1653	1618	1587	1580	1500	1456	1423	1403	1400
	1/4 T	145	148+	138	136+	138	185+	227	181	170	164	156	113
	$\overline{D_0}$	+ 6	+ 6+	+ 3	+ 0	− 3	− 6	− 9	−10	− 8	− 7	− 7	− 7
	A_D	6+	4+	5+	6+	8	10+	11+	12+	12	13	12	12+
0°	$\overline{t_0}$	1758	1760	1741	1679	1627	1600	1540	1499	1471	1448	1421	1407
	1/4 T	152	156	148	156	137	148	114	186+	194	168	168	142
	$\overline{D_0}$	+ 3	+ 5	+ 5	+ 4	+ 2	+ 0	− 2	− 4	− 7	− 7	− 7	− 8
	A_D	6+	6+	5	5	(7)	(8+)	(10)	11+	13+	14	14	13
20°S	$\overline{t_0}$	1785	1778	1764	1727	1648	1572	1508	1492	1491+	1474	1447	1430
	1/4 T	175	168+	155	162+	164+	144+	181+	158+	151+	162	173	174+
	$\overline{D_0}$	+ 6	+ 7	+ 7	+ 7	+ 6	+ 6	+ 3	− 0	(−3)	− 6+	− 7	− 8
	A_D	5+	8+	8+	7+	(6)	7	13+	14+	(16±)	(18±)	19+	17+
40°S	$\overline{t_0}$	1818+	1800+	1776	1738	1652	1564	1512	1505	1496	1492	1468	1454
	1/4 T	139±	145±	137	150+	148+	147+	152+	164+	173+	172+	187+	172+
	$\overline{D_0}$	+[illegible]	+12	+13	+12	+11	+11	+ 9	+ 5	+ 0	− 2	− 6	− 8
	A_D	[illegible]	9+	8	9+	8+	(9+)	10+	14+	19+	21+	21+	19+
60°S	$\overline{t_0}$	184[illegible]	1803	1763	1730	1642	1580	1541+	1551+	1521+	1499	1479	1500
	1/4 T	[illegible]	142	144	147+	147+	148	153±	148±	148±	150	154	136
	$\overline{D_0}$	[illegible]	+20	+19	+20	+18	+18	+15+	+10+	+ 5+	+ 2	− 4	−12
	A_D	[illegible]	12+	10	9+	7	7	8+	7+	12+	17	11+	11

л и ч е н и ю склонения (при принятии восточного за +) и приходившихся для нулевого меридиана на 20-е и 21-е столетия.

По мере увеличения долготы значения $\overline{t_0}$ оказались довольно правильно понижающимися, но такое понижение на большинстве широт переходило в повышение, сменявшееся затем резким—на больших широтах—понижением за некоторой демаркационной линией, обозначенной в табл. 2 толстой линией, после чего идет дальнейшее регулярное снижение до падения на 600 лет для нулевого меридиана. Линию резкого падения можно проследить лишь на больших магнитных широтах, где она находится повидимому в связи со средним направлением агонической линии; вблизи же магнитного экватора это резкое падение нельзя фиксировать сколько-нибудь достоверно. Вблизи экватора наблюдается другое осложнение картины: уменьшение амплитуды A_D изменений D, наблюдаемое по мере продвижения по параллельному кругу, доходит повидимому до равенства A_D нулю; когда же A_D начинает снова возрастать, то за эпоху $\overline{t_0}$, которая соответствовала бы общему плавному ходу кривой ($\overline{t}-\lambda$), надо принимать эпоху перехода склонения через D_0 при у м е н ь ш е н и и D, а не отстоящее от него на $+300$ или -300 лет значение $\overline{t_0}$, соответствующее переходу через D_0 при увеличении D. После нового перехода A_D через 0 восстанавливается знак перехода склонения через D_0 на плавно изменяющейся кривой ($\overline{t_0}-\lambda$). Границы таких аномальных районов $\overline{t_0}$ отделены в табл. 2 квадратными скобками.

Полученные этим способом окончательные значения $\overline{t_0}$ приведены в первых строках каждого из подразделений табл. 2, причем в круглые скобки заключены значения, полученные на основании указанной выше интраполяции, а курсивом напечатаны полученные на основании экстраполяции. Жирным напечатаны значения $\overline{t_0}$, вытекающие минимум из двух непосредственно снятых с графика или интраполированных значений t_{max}, t_0 и t_{min}.

Во вторых строках подразделений той же таблицы помещены полученные из дополненной исходной таблицы временные средние значения $\frac{1}{4}T$, причем величинам, полученным из каждой пары из трех величин t_{max}, t_0 и t_{min}, придавался вес, равный произведению весов исходных данных. Жирным обозначены здесь значения $\frac{1}{4}T$, полученные минимум из двух непосредственно снятых с графиков эпох. Значения $\frac{1}{4}T$ в этой таблице должны меньше отличаться друг от друга, чем в исходной таблице, так как они являются уже осредненными в пределах каждого подразделения, а также быть в общем несколько ближе к 150. Что это так, видно из табл. 3, аналогичной табл. 1.

Были заполнены также пробелы исходной таблицы по отношению к недостававшим D_{max}, D_0 и D_{min}, причем кроме интраполяции были также использованы (что считалось экстраполяцией) ординаты с графиков (D_0-t) для моментов $\overline{t_0} \mp n.150$. Полученные отсюда сглаженные значения вековых средних склонения $\overline{D_0}$ и амплитуды A_D отклонений от них [вычислявшиеся по значениям ($D_{max}-D_0$), (D_0-D_{min}) и $\frac{1}{2}$ ($D_{max}-D_{min}$)] приведены в третьих и четвертых строках подразделений табл. 2.

Обзор этих данных показывает значительную закономерность в распределении значений t_0, D_0 и A_D по поверхности земного шара, но получаю-

Таблица 3 — Table 3

Осредненные окончательные значения $^1/_4$ T и средние отклонения единичных их значений.

Averages of final values of $^1/_4$ T and mean deflections of their individual values.

φ \ λ	0—150°	160—350°	0—350°
80N—20°N	145∓12	148∓12	147∓12
0—60°	141∓14	155∓14	148∓16
80N—60°	143∓13	150∓14	147∓13

щаяся картина не соответствует той, какая вытекала бы исключительно из гипотезы обращения магнитных полюсов земли вокруг некоторых средних их положений с периодом 588 лет.

Определение путей этих полюсов на основании выражаемых табл. 2 сглаженных по пространству и по времени вековых периодических изменений склонения и сопоставление вытекающих из этих движений полюсов изменений склонения с данными этой таблицы составят предмет дальнейших исследований. Это сопоставление позволит выделить ту часть вековых изменений, какую можно будет условно считать апериодическими изменениями, связанными, можно думать, с необратимыми изменениями намагничения отдельных частей земной коры. Однако также из обзора данных таблицы 2 можно отметить, что эти изменения сосредоточены преимущественно на протяжении материкового полушария, границы которого отмечены в табл. 2 двойной линией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van-Bemmelen Willem, Die Abweichung der Magnetnadel: Beobachtungen, Säcular-Variations, Wert- und Izogonen-Systeme bis zur Mitte des XVIII Jahrhunderts, Observ. made at the R. Magn. & Meteor. Observatory at Batavia, Suppl. to vol. 21, 1—109, 1899.
2. Вейнберг Б. П., Каталог магнитных определений в СССР и сопредельных странах с 1556 по 1930, Ленинград, 1, I—XXIII и 1—216, 1929; 2, 217—296, 1932; 3, I—VIII и 297—391, 1933.
3. Вейнберг К. Б., Магнитное склонение в Сибири в XVII и XVIII веке, Труды 3-го съезда Всер. ассоц. физ., 80—81, 1923 и Изв. Томск. тех. инст., 43, № 3, 28—29, 1923.—Kyrill Weinberg, Beitrag zur Methodologie der Rekonstruktion der Deklinationsverteilung für altere Zeiten, Zeitschr. f. Geoph., 7, № 3—4, 1930.
4. Weinberg B. P, Catalogue of Magnetic Determinations in the Polar Regions, Sections I & II, Moscow, 1—51.
5. Halley Edm., A General Chart Shewing at One View the Variation of Compass, London, 1701.
6. Mountaine William & Dodson James, Account on the Methods Used to Describe Lines on Dr. Halley's Chart of the Terraneous Globe Shewing the Variation of the Magnetic Needle about the Year 1755 in All Known Seas, London, 1758.
7. Tentamen solvendi, problema geographico-magneticum a perillustri Academia Imperiali Petropolitana in annum 1793 propositum Auctore Christiano Amadeo Kratzenstein professore Regio Hafniensi, Petropoli, стр. 43, карта 2, 1793.
8. Hansteen Christopher, Untersuchungen über den Magnetismus der Erde, Christiania, стр. 502+148, 1819.
9. Neumayer G., Atlas des Erdmagnetismus, Leipzig, 1885.
10. Van-Bemmelen, De isogonen in de XVIde en XVIIde Eeuw, Utrecht, стр. 55, 1893.

11. Deutsche Seewarte, Linien gleicher Missweisung für den Jahr 1920.
12. Homery G., Déclinaison magnétique sur l'ensemble du Globe, C. R., **196**, 797—799, 1933.
13. Вейнберг Б. П., Определение длины периода по наблюдениям в течение доли одного периода (печатается в Изв. Гл. геоф. обсерваторий).

Нефтяной геолого-разведочный институт.
Москва.

B. P. WEINBERG AND K. B. WEINBERG. THE PERIOD OF SECULAR VARIATION OF MAGNETIC DECLINATION

SUMMARY

The questions concerning the value of the period of secular variation of the declination and of its being the same or different for different regions have not yet received a definite solution. Therefore the authors have made an attempt to revise these questions, using newly collected data on ancient observations in the USSR (2,3) and in the Arctics (4), and methods different from those, used in previous investigations.

From the graphs ($D—t$), constructed for equidistant (in angular measure) points of the earth's surface by means of the values of D, taken from different tables and charts (1,5—12), the authors have found the epochs T_{max}, t_0 and t_{min}, when the declination (East) had maximum mean and minimal values—D_{max}, D_0 and D_{min}—and these values. After averaging these values along latitude and along longitude and computing their weighted mean values [taking into account the uncertainity ($+$) or the doubtfulness ($\frac{+}{+}$) of some of those], the authors found the absolute values of the differences $|t_{max} - t_0|$, $|t_0 - t_{min}|$ and $\left|\frac{1}{2} t_{max} - \frac{1}{2} t_{min}\right|$ representing one quarter of the full period T of the variation of the declination. **The values of $\frac{1}{4} T$** proved to be distributed irregularly over the surface of the globe and **to be equal to 150 years to the first approximation** (Table 1).

This conclusion permitted us to fill the gaps of the initial tables as concerns the deficient values of t_{max}, t_0 and t_{min} by means of intrapolation (round brackets) or extrapolation (adding $\pm n.$ 150; values in italics) and to find in this way the final values of $\frac{1}{4} T$. These values are printed in the second lines of each subdivision of Table 2 (boldface denoting the values derived from at least two of three differences quoted above and based on the values of t_{max}, t_0 and t_{min} from the graphs or on intrapolation). They show the same approximate equality and the same lack of regularity in the distribution as in the initial tables, as can be seen from Table 3.

The opposite show the values of $\overline{t}_0$—mean epoch of the passing of D over the mean value D_0, when D is increasing,—the values of $\overline{D}_0$ weighted mean of D_0 and $\frac{1}{2}(D_{max} + D_{min})$—and the amplitudes A_D [computed from ($D_{max}—D_0$), ($D_0—D_{min}$) and $\frac{1}{2}$ ($D_{max}—D_{min}$)] of the secular variation of D printed in the first, third and fourth lines of each subdivision of Table 2, and computed from the initial Tables after filling the gaps concerning D_{max}, D_0 and D_{min} by means of intrapolation or extrapolation [in this case, taking the ordinates of the graphs ($D_0—t$) for the epochs $\overline{t}_0 \mp n.$ 150].

The thick line on Table 2 is the demarcation in passing which the epoch t_0 shows an abrupt diminution, especially pronounced at high magnetic altitudes. The brackets separate the regions near the magnetic equator, at the boundaries of which the amplitude A_D passes over 0 and the epoch $\overline{t}_0$ corresponds not to an increase but to a diminuation of D, when passing over D_0.

The distribution of $\overline{t}_0$, $\overline{D}_0$ and A_D is evidently regular but does not correspond to what would follow from the periodic revolution of the magnetic poles around a mean position. The computing of the consecutive positions of the poles and the comparison of the distribution given by Table 2 and the distribution following from these positions shall be the subject of further investigations, but it can be seen even now, that the main differences of these two distributions are concentrated principally on the land hemisphere, the boundaries of which are represented in Table 2 by double lines.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ ГОРНЫХ ПОРОД И ВЛИЯНИЕ ВЛАЖНОСТИ НА ЭТИ КОНСТАНТЫ

Н. К. ЩОДРО и Н. М. МАСЛОВА

Введение

Достоверных определений диэлектрической постоянной геологических пород весьма мало и объектом их служат высушенные образцы, без учета влажности[1]. Между тем породы в естественном состоянии, с какими мы имеем дело при разведках, всегда являются влажными.

С другой стороны, в последнее время И. Ратклиф, Ф. Уайт[2] и М. Стрöт[3] обнаружили, что диэлектрическая постоянная пород зависит также и от частоты электрических колебаний или волн, применяемых при разведке или при измерениях. Поэтому мы поставили себе задачей измерить д. п. образцов горных пород при определенной частоте применяемых электрических колебаний, а именно при длине волны $\lambda = 500$ м, и изучить влияние влажности на величину д. п.

Почти все горные породы, будучи в сухом виде изоляторами, во влажном виде благодаря порозности становятся проводниками, что требует применения различных методов для сухих и сильно влажных пород.

До сих пор часто при определении диэлектрической постоянной горных пород, для того чтобы иметь дело с телом однородным, исследуемый образец обращают в порошок, затем делают измерения его диэлектрической постоянной например методом Штарке[4]. Однако такой способ нельзя считать удачным, так как при этом нарушается первоначальное состояние образца, определяющее значение диэлектрической постоянной в природных условиях.

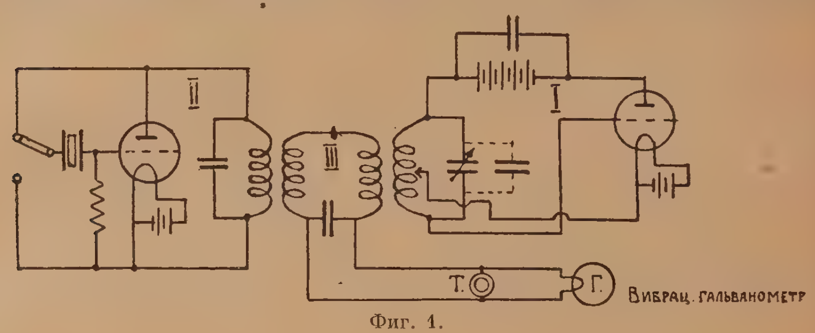
Все же методы, могущие служить для определения д. п. твердых тел в естественном состоянии, требуют, чтобы измеряемое тело имело вид тонкой пластины. В противном случае нужно брать образцы весьма большого размера, чтобы отношение толщины образца к его поверхности было достаточно мало. При этих условиях измерения д. п. можно производить с достаточной степенью точности любым методом. Образцы же горных пород весьма трудно получить в виде тонких пластин (кроме

[1] Handbuch der Experimentalphysik, 25, в. 3, стр. 30.
[2] Ratcliff J. and White F., The Electrical Properties of the Soils, Phil. Mag. (7) 10, 667, № 65, 1930.
[3] Strutt M., Messungen der elektrischen Erboden Eigenschaften, Elektr. Nachr. Technik, 7, 387, № 10, 1930.
[4] Starke H., Wied. Annal., 60, 629, 1897.

слюды и т. п.) и кроме того при таких небольших толщинах может обнаружиться проводимость, которая усложнит измерения. Таким образом при изучении д. п. горных пород приходится иметь дело с определениями весьма малых емкостей, для чего более подходящим для сухих и мало влажных образцов является метод биений[1]. Исследование диэлектрической постоянной горных пород с большой влажностью требует другого метода, а именно моста Вина, что и составит вторую часть настоящей работы.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА БИЕНИЙ

Метод биений, введенный Гервегом[2] и улучшенный затем Пунгом и Преном[3], Маске[4] и другими, является весьма точным, достаточно раз-



Фиг. 1.

работанным методом для определения малых емкостей или малых изменений их. На фиг. 1 представлена схема измерений емкостей по методу биений.

Здесь *I* и *II* представляют необходимые для этого слабо между собой связанные генераторы незатухающих колебаний высокой частоты; первый *I* с частотой, равной $\omega_1 = 2\pi n_1$, т. е. периодом $T_1 = \frac{1}{n_1}$, второй *II* с частотой $\omega_2 = 2\pi n_2$ и периодом $T_2 = \frac{1}{n_2}$, причем ω_1 и ω_2 близки друг к другу. Первый генера ор *I* представляет собой обычный ламповый, так называемый трехточечный генератор и является измерительным, и к емкости его C_0 приключается конденсатор с образцом, диэлектрическую постоянную которого нужно измерить. В качестве постоянного генератора *II* мы воспользовались генератором, частота которого ω_2 была стабилизирована пьезокварцем; с ним и сравнивался генератор *I*.

Для этого оба эти генератора были весьма слабо связаны с третьим апериодическим контуром *III*, в цепи которого находился детектор и телефон, включенный на блокировочный конденсатор.

Тогда в этом контуре *III* будет иметь место наложение друг на друга двух индуцированных там электродвижущих сил ε_1 и ε_2. В телефоне мы услышим в результате сложения их весьма низкий тон (звуковой

[1] Blüch O., Physik. Zeitschr., **27**, 240, 1926.
[2] Herweg I., Verhand. d. Deutsch. phys. Ges., **21**, 572, 1919.
Herweg I., Zeitschr. f. Physik, **3**, 36, 1920; **16**, 23, 1923; **16**, 29, 1923.
[3] Pungs L. und Preuner G., Physik. Zeitschr., **20**, 543, 1919.
[4] Maske F., Physik. Zeitschr., **30**, 197, 1929.

частоты) (h), так называемые биения; частота биений (h); в случае если n_1 близко к n_2, определяется разностью ($n_1 - n_2$):

$$h = n_1 - n_2.$$

Действительно, так как

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{0_1} \cos \omega_1 t \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{0_1} \cos \omega_2 t,$$

то результирующая электродвижущая сила ε в контуре III выразится так:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_{0_1}) \cos \omega_2 t + \varepsilon_{0_1} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t),$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_{0_2} - \varepsilon_{0_1}) \cos \omega_2 t + 2\varepsilon_{0_1} \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \cdot t \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) t.$$

Первый член $[(\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}) \cos \omega_2 t]$ при достаточном приближении ε_{02} к ε_{01} исчезает, а второй $\left[2\varepsilon_{01} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\right]$ и будет представлять биения, т. е. колебания с двойным периодом, а именно будет иметь место пульсация $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$, амплитуда которой будет изменяться согласно следующему закону

$$\left[2\varepsilon_{0_1} \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\right],$$

т. е. эта амплитуда будет равна максимальному значению ($2\,\varepsilon_{01}$) при $t = 0$; будет равна минимальному значению при $t = \left(\frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2}\right)$; и затем снова будет равна тому же максимальному значению ($2\,\varepsilon_{01}$) при $t = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$. Таким образом период ($T\delta$) вариации амплитуды будет таков:

$$T_\delta = \frac{1}{h} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2},$$

т. е. частота биений (h) равна

$$h = n_1 - n_2$$

и значит она действительно определяется разностью ($n_1 - n_2$).

Высота этого тона (h) в телефоне при приближении частоты (n_1) и к (n_2) все время понижается, и при $n_1 = n_2$ звук исчезает.

Таким образом имеется возможность точно измерять изменение (n_1) по сравнению с (n_2), что и служит основанием этого метода.

Если например $n_1 = 1\,001\,000$, а $n_2 = 100\,000$, то в телефоне будет хорошо слышен тон биений высотою $h = 1\,000$, который можно для большей точности контролировать сравнением с камертоном, причем наблюдается новый тон биений этого камертона с $h = 1\,000$. Достигаемая этим способом наблюдения точность сравнения n_1 с n_2 (т. е. точность измерения) весьма велика.

С другой стороны, всякое изменение значения общей емкости C_0 измерительного генератора I, вызывает изменение его частоты n_1 и следовательно ведет за собой изменение высоты (h) тона биений и нарушает условие $n_1 = n_2$.

Восстанавливая нарушенное равновесие условия $n_1 = n_2$ вариацией емкости измерительного конденсатора C_0 генератора I, мы получаем

возможность определения величины первоначального изменения емкости C_0. Так как изменения частоты колебаний ω_1 генератора I по сравнению с частотой колебаний ω_2 генератора II можно производить с большей точностью, то с такой же точностью можно определять и увеличение емкости. Метод измерения состоит в следующем.

Обозначим через C_0 емкость конденсатора, наполненного воздухом, диэлектрическую постоянную которого ε_0 можем принять за единицу ($\varepsilon_0 = 1$), причем $C_0 = C_0'' + C_0'$.

Если вставить между обкладками его пластинку измеряемой горной породы, диэлектрическая постоянная которой ε_x, то емкость системы будет равна

$$C_x = C_0 \cdot \varepsilon_x, \tag{1}$$

или точнее

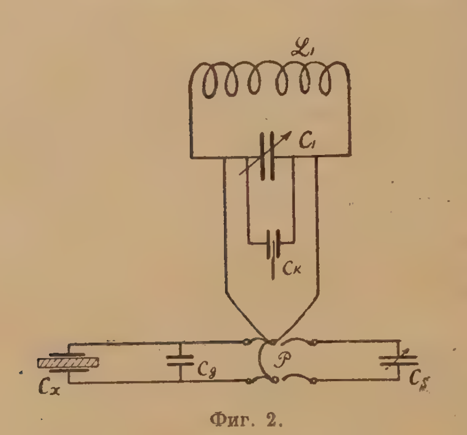
$$C_x = C_0'' + C_0' \cdot \varepsilon_x, \tag{1'}$$

где C_0'—часть C_0, заполняемая диэлектриком, диэлектрическая постоянная которой равна ε_x.

Отсюда найдем значения диэлектрической постоянной (ε_x) изучаемой породы:

$$\varepsilon_x = \frac{C_x - C_0''}{C_0'}. \tag{1''}$$

Если измерения д. п. производятся без отведения к земле наружных обкладок конденсаторов, то схема измерения методом замещения представится так, как это изображено на фиг. 2.



Фиг. 2.

Здесь L_1 $(C_1 + C_s)$ или L_1 $(C_1 + C_x + C_g)$—первый из осцилляторов метода, с их основными самоиндукцией h и емкостью C_1;

C_x — измерительный конденсатор;

C_s — стандартный, прецизионный, переменный конденсатор, с которым сравнивается C_x;

C_g — дополнительный конденсатор для компенсации нулевой емкости конденсатора;

C_k — малый переменный конденсатор для точной настройки;

P — переключатель.

Сначала при помощи переключателя P присоединяем к C_1 один дополнительный конденсатор C_g и подбором C_g и изменением C_k добиваемся, чтобы система давала определенный вблизи нуля тон h_v, при котором соединенный параллельно с телефоном вибрационный гальванометр даст максимальное отклонение.

Затем вместо C_g к C_1 приключаем C_s и, изменяя его емкость, добиваемся того, что при известном значении C_s, равном C_{n1} (близком к нулевому его значению), в телефоне получится тот же тон h_v, в чем убедимся по идентичному отклонению вибрационного гальванометра.

Теперь присоединим к C_g измерительный конденсатор, наполненный воздухом, емкость которого C_0 требуется определить. и, повторяя опе-

рацию с настройкой при помощи C_1 и C_k, добиваемся в телефоне того же тона h_ν. Наконец, переключая к C_1 C_s, снова добиваемся, чтобы при новом значении C_s, равном, скажем, C_{n2}, в телефоне опять был слышен тот же тон h_ν.

Отсюда определяется емкость C_0 измерительного конденсатора, наполненного воздухом:

$$C_0 = C_0'' + C_0' = C_{n_2} - C_{n_1} \tag{2}$$

После этого вставим в измерительный конденсатор с емкостью C_0 образец, диэлектрическую постоянную которого ε_x нужно найти. Тогда емкость его станет равной C_x, и для получения прежнего тона в телефоне нам придется увеличить емкость C_s до нового значения, равного C_{n_3}. Отсюда

$$C_x = C_0\varepsilon_x = C_{n_3} - C_{n_1} \tag{3}$$

или точнее

$$C_x = C_0'' + C_0'\varepsilon_x = C_{n_3} - C_{n_1}. \tag{3'}$$

Из (1), (2) и (3) находим приблизительно

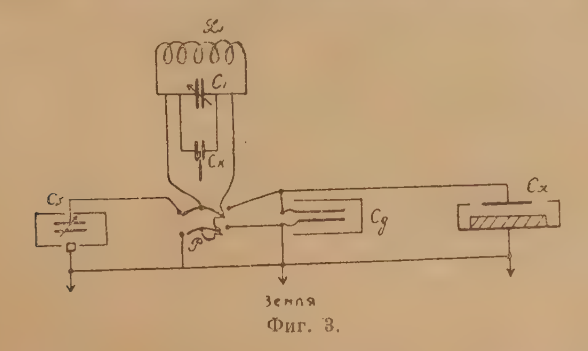
$$\varepsilon_x = \frac{C_x}{C_0} = \frac{C_{n_3} - C_{n_1}}{C_{n_2} - C_{n_1}} \tag{4}$$

или точнее

$$\varepsilon_x = \frac{C_x - C_0''}{C_0'} = \frac{(C_{n_3} - C_{n_1}) - C_0''}{(C_{n_2} - C_{n_1}) - C_0''}. \tag{4'}$$

Значение воздушной емкости измерительного конденсатора C_0' определялось из измерений или вычислялось из размеров его. Поправки C_0'' также находились из измерений (см. далее).

Кроме того для проверки прибора и определения поправки C_0'' нами были в том же конденсаторе произведены определения диэлектри-



Фиг. 3.

ческой постоянной стекла и эбонита. Отсюда мы можем получить значения диэлектрической постоянной изучаемых образцов пород относительно тела, диэлектрическая постоянная которого измерена, а именно несколько сортов стекла и эбонита. Действительно, мы сначала сделаем измерения диэлектрической постоянной изучаемой горной породы и по уравнениям (1), (2) и (3) получим:

$$C_0^1(\varepsilon_x - 1) = C_{n_3} - C_{n_2}. \tag{5}$$

Если в том же конденсаторе сделать определения диэлектрической постоянной стекла или эбонита ε_u, то получим:

$$C'_0(\varepsilon_u - 1) = C_{n_4} - C_{n_2}. \qquad (5')$$

Из (5) и (5') получим:

$$\frac{\varepsilon_x - 1}{\varepsilon_u - 1} = \frac{C_{n_3} - C_{n_2}}{C_{n_4} - C_{n_2}}$$

и таким образом мы можем найти ε_x относительно ε_u.

Если образец породы при определении его диэлектрической постоянной в конденсаторе занимает не весь промежуток между пластинками, то вводим поправки.

Схема измерений, когда одна из обкладок отведена к земле, представлена на фиг. 3.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Проверка измерительного конденсатора. Определение поправки

Для измерения диэлектрической постоянной испытуемый образец в виде пластины помещался между пластинами круглого конденсатора C_x, а для достижения равномерного нажима вся система, т. е. конденсатор с пластиной, в свою очередь помещалась в эбонитовый пресс.

Пластины этого пресса прижимались друг к другу в трех точках болтами с пружинками.

Но в большинстве случаев для определения диэлектрической постоянной образцов пород в виде пластинок на них накладывались или наклеивались концентрические, круглые станиолевые листочки, которые и служили обкладками измерительного конденсатора C_x. Чтобы эти станиолевые обкладки лучше держались на исследуемых образцах, с обеих сторон на обкладки накладывался ровный слой невулканизированной резины и вся система помещалась в такой же пресс.

Емкость C'_0 измерительного конденсатора наполненного воздухом, определялась, как мы уже упоминали, двумя способами.

Для латунного плоского конденсатора эта величина C'_0 определялась непосредственным измерением, для чего в этот конденсатор вкладывались три небольших квадратных кусочка измеряемого образца, толщина которых равнялась толщине обра а, причем влияние этих прокладок на C'_0 учитывалось.

В случае станиолевых обкладок конденсаторов, а также и для латунного, эта величина C'_0 вычислялась приближенно по формуле емкости плоского конденсатора:

$$C'_0 = \frac{S'\varepsilon_0}{4\pi d} \text{ в см}, \qquad (1)$$

где ε_0—диэлектрическая постоянная воздуха, принимаемая нами равной единице и S' в случае круглого плоского конденсатора,—равнялась $S' = \pi r^2$, где r—радиус конденсатора.

Поправка на краевой эффект (для круглого конденсатора) производилась прибавлением по длине окружности пластинки, узкой полоски, шириной, равной b, и площадью, равной

$$S'_0 = b \cdot 2\pi r = 0.4413 \cdot 2\pi r \text{ см}^2. \qquad (2)$$

Таким образом общая площадь S будет равна:

$$S = S' + S'_0 = \pi r^2 + 0.4413 \cdot 2\pi r \text{ см}^2.$$

Когда это требовалось, и когда отношение $\frac{d}{r}$ для конденсатора было достаточно мало, мы пользовались более точным выражением для емкости плоского круглого конденсатора, а именно формулой Кирхгофа-Клаузиуса:

$$C'_0 = \frac{\varepsilon r^2}{4d} + \frac{\varepsilon r}{4\pi}\left[1 + \ln\frac{16\pi(b+d)r}{d^2} + \frac{b}{d}\ln\frac{b+d}{b}\right],$$

где d—расстояние между пластинками, а b—толщина самих пластинок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ПОПРАВКИ (C''_0) НА ЕМКОСТЬ ПОДВОДЯЩИХ ПРОВОЛОК

Для определения среднего значения поправки C''_0 на подводящие проволоки делались измерения емкости плоского круглого латунного конденсатора, служившего измерителем при различных расстояниях между пластинками, с поправкой на прокладки и одновременно те же емкости теоретически вычислялись по вышеприведенной формуле:

$$C'_0 = \frac{\pi r^2 + b \cdot 2\pi r}{4\pi d}.$$

Разница между этими опытно и теоретически найденными значениями емкости дает поправку на подводящие проволоки, которая при этом остается приблизительно постоянной.

Результаты таких измерений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Определение среднего значения поправки C''_0 из сравнения опытного и теоретического значения емкостей круглого латунного конденсатора с радиусом r=5.55 см при различных d.

d см расстояние между пласт. конденс.	C_0 теорет. знач. с поправк. на краевой эффект	C_0 измер.	C'''_0 поправка на прокладки	$C_0 - C'''_0 = C'_0 + C''_0$ из измерений	C''_0
0.85	10.11	13.77	0.27	13.50	3.39
0.75	11.3	15.39	0.25	15.14	3.84
0.60	13.84	17.64	0.28	17.36	3.52
0.55	15.0	18.72	0.27	18.45	3.45
0.47	17.35	20.88	0.15	20.73	3.38
0.18	42.9	46.00	0.25	45.75	2.85

Сред. . . . . 3.40±0.20

Из табл. 1 мы видим, что среднее значение поправки C''_0 для круглого, латунного конденсатора оказывается равным:

$$C''_0 = 3.40 \pm 0.20 \text{ см}.$$

Измерения показали, что среднее значение такой же поправки C_0'' на подводящие провода для станиолевых конденсаторов равно:

$$C_0'' = 0.83 \text{ см.}$$

Далее мы приводим в виде табл. 2 сделанное нами измерение диэлектрических постоянных различных сортов стекла и эбонита. Эти измерения служили нам для определения констант и проверки установки.

Таблица 2

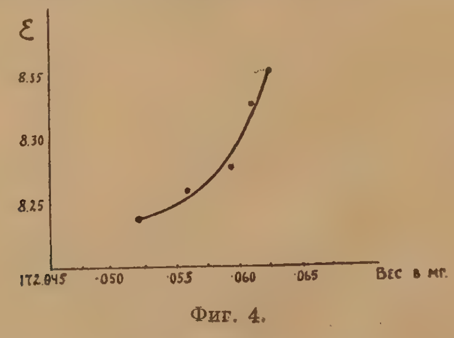
Значения диэлектрической постоянной стекла и эбонита. Измерено в круглом латунном конденсаторе под спец. эбонитовым прессом. $r = 5.5$ см.

№ по пор.	Назв. и № об-ца	Толщина d	Относ. площади конд. к толщ. образца S/d	C_0 теорет. с поправк. на краевой эффект	$C_0' = C_0 - (C_0'' + C_0''')$ из измерен.	C_0''	C_0'''	C_x	$C_x' = C_x - C_0''$	ε (по C_0' измерен.)	$t°$
				Стекло (разных сортов)							
1	3	0.85	112	10.11	10.10	3.4	0.27	72.7	69.3	6.86	17.0
2	4	0.6	159	13.84	13.96	3.4	0.28	96.93	96.53	6.70	16.5
3	6	0.55	173	15.0	15.05	3.4	0.27	104.22	100.82	6.70	14.0
4	7	0.47	204	17.35	17.33	3.4	0.15	113.67	110.27	6.36	16.5
5	11	0.36	264	22.28	22.70	3.4	0.15	152.73	149.33	6.58	14.0
6	12	0.3	317	26.47	25.0	3.4	0.31	161.1	157.7	6.31	14.0
					Эбонит						
1	3-Э	0.75	126	11.3	11.74	3.4	0.25	33.48	30.08	2.56	14.5
2	2-Э	0.2	476	39.32	40.45	3.4	0.25	107.19	103.79	2.56	13.0
3	1-Э	0.18	528	42.9	42.35	3.4	0.25	116.73	113.33	2.67	16.0

Мы видим, что найденные нами значения диэлектрической постоянной стекла и эбонита не выходят за пределы ранее найденных определений этой константы.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ И ВЛИЯНИЕ НА НЕЕ ВЛАЖНОСТИ

Нами измерены диэлектрические постоянные 12 образцов различных горных пород, сухих и в различной степени влажных, и результаты представлены в следующих таблицах и фигурах.



Фиг. 4.

Результаты измерений образца № 1 представлены в табл. 3 и фиг. 4.

Таблица 3

Образец № 1 Мрамор белый (месторожд. неизв.)

Измерено в конденсаторе со станиолевыми обкладками на резиновых прокладках, в эбонитовом прессе.

Радиус пластин конденсатора $r = 4.85$ см
Толщина образца $d = 0.522$ см
Отнош. площ. конд. к толщ. образца $S/d = 141$

№ по пор	Дата измерений	C_0 теорет. с поправк. на краевой эффект в см	C_x измер. в см	$C_x' = C_x - C_0''$	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
1	17/V	12.34	102.6	101.77	8.24	сухого 172.052	23.5	сухого 172.052	8.24
								влаж.	
2	25/V	12.34	102.93	102.1	8.27	.056	21.0	.056	8.26
3	26/V	12.34	102.49	101.6	8.23	.056	23.0	.059	8.28
4	17/VI	12.34	103.2	102.4	8.29	.056	24.0	.061	8.33
5	1/VI	12.34	102.8	102.0	8.26	.059	24.0	.062	8.36
6	15/V	12.34	103.2	102.37	8.29	.059	23.0	—	—
7	2/VI	12.34	103.7	102.9	8.33	.061	24.5	—	—
8	3/VI	12.34	104.0	103.2	8.36	.062	24.0	—	—

Результаты измерений образца № 2 представлены в табл. 4.

Таблица 4

Образец № 2 Мрамор серый (Уфалейское месторожд., Средний Урал)

Условия измерений те же, что и у первого образца.

$r = 4.0$ см
$d = 1.258$ см
$S/d = 53.5$

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теорет. с попр. на краев. эффект в см	C_x измер. в см	$C_x' = C_x - C_0''$ из измерен. в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
1	9/VII	4.06	34.2	33.4	8.22	сухого 294.035	25.0	сухого 294.035	8.22
2	2/VII	4.06	34.1	33.3	8.20	.038	26.8	—	—
3	29/VI	4.06	34.4	33.6	8.27	.039	20.6	—	—
4	25/VI	4.06	34.3	33.5	8.25	—	24.0	—	—
5	23/VI	4.06	34.1	33.3	8.20	.040	25.0	—	—
6	3/VII	4.06	34.2	33.4	8.22	.040	25.8	—	—
7	22/VI	4.06	34.8	34.0	8.37	.100	24.5	—	—

Результаты измерений образца № 3 представлены в табл. 5.

Образец № 3 Мрамор белый (месторождение неизвестно)

$r = 4.85$ см, $d = 0.294$ см, $S/d = 251$ Таблица 5

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теорет. с поправк. на краев. эффект в см	C_x измер. в см	$C_x' = C_x - C_0''$ в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
								сухого	
1	17/V	21.02	169.8	169.0	8.04	91.448	23.5	91.448	8.04
2	21/V	21.02	170.9	170.1	8.09	.450	22.5	—	—
3	28/V	21.02	171.2	170.4	8.10	.452	23.0	—	—
4	15/V	21.02	171.2	170.37	8.10	.452	23.0	—	—

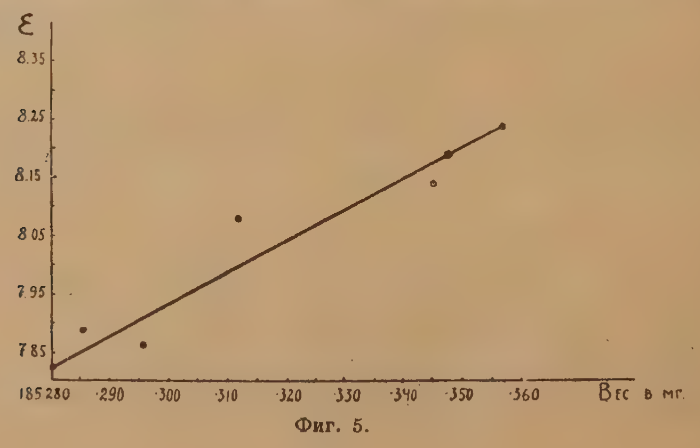
Результаты измерений образца № 4 представлены в табл. 6.

Образец № 4 Мрамор белый (Сугомакское месторождение, Юж. Урал, Кыштымск. район)

$r = 4.0$ см, $d = 0.615$ см, $S/d = 93$ Таблица 6

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теорет. с поправк. на краев. эффект в см	C_x измер. в см	$C_x' = C_x - C_0''$ измер. в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
1	21/VI	7.38	49.6	48.8	6.61	119.050	24.5	119.050	6.61
2	20/VI	7.38	49.5	48.7	6.60	.051	22.5	.051	6.60
3	17/VI	7.38	49.6	48.8	6.61	.071	20.0	.071	6.61
4	4/VI	7.38	49.2	48.4	6.55	.082	20.	.082	6.55
5	3/VI	7.38	49.6	48.8	6.61	.088	20.	.088	6.61

Результаты измерений образца № 5 представлены в табл. 7 и фиг. 5.



Фиг. 5.

Таблица 7

Образец № 5 **Лабрадорит** (месторождение—Головино. УССР)

Условия измерений те же, что и у первого образца. $r = 4.85$ см, $d = 0.60$ см, $S/d = 123$

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теоретич. в см	C_x измерен. в см	$C'_x = C_x - C''_0$	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
						сухого		высушен.	
1	17/V	10.8	85.22	84.39	7.82	185.280	23.5	185.280	7.82
2	28/V	10.8	86.1	85.3	7.89	. 285	23.0	. 285	7.89
3	21/VI	10.8	87.3	86.5	8.01	. 297	24.5	. 297	8.01
4	19/V	10.8	88.3	87.5	8.10	. 313	22.0	. 313	8.10
5	1/VI	10.8	88.9	88.1	8.15	. 345	24.0	. 345	8.15
6	26/V	10.8	88.3	88.5	8.19	. 348	23.0	. 348	8.19
7	2/VI	10.8	89.8	89.0	8.24	. 357	24.5	. 357	8.24

Результаты измерений образца № 6 представлены в табл. 8.

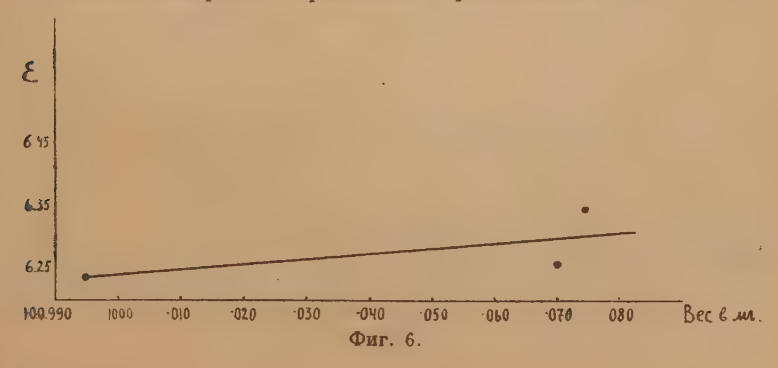
Образец № 6 **Гипс** (месторождение неизв.)

Условия измерений те же, что и у первого образца. $r = 4.0$ см, $d = 0.467$ см, $S/d = 118$

Таблица 8

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теоретич. с поправк. на краевой эффект	C_x измер. в см	$C'_x = C_x - C''_0$ в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
								сухой	
1	4/VI	9.45	59.7	58.9	6.23	81.278	20.0	81.277	6.22
2	17/VI	9.45	59.2	58.4	6.18	.298	20.0	. 278	6.23
3	20/VI	9.45	59.6	58.8	6.22	.277	22.0	. 285	6.22
4	3/VII	9.45	59.6	58.8	6.22	.285	25.6	. 298	6.18

Результаты измерений образца № 7 представлены в табл. 9 и фиг. 6.



Фиг. 6.

Образец № 7 Гипс (Донбасс, Артем. окр.)

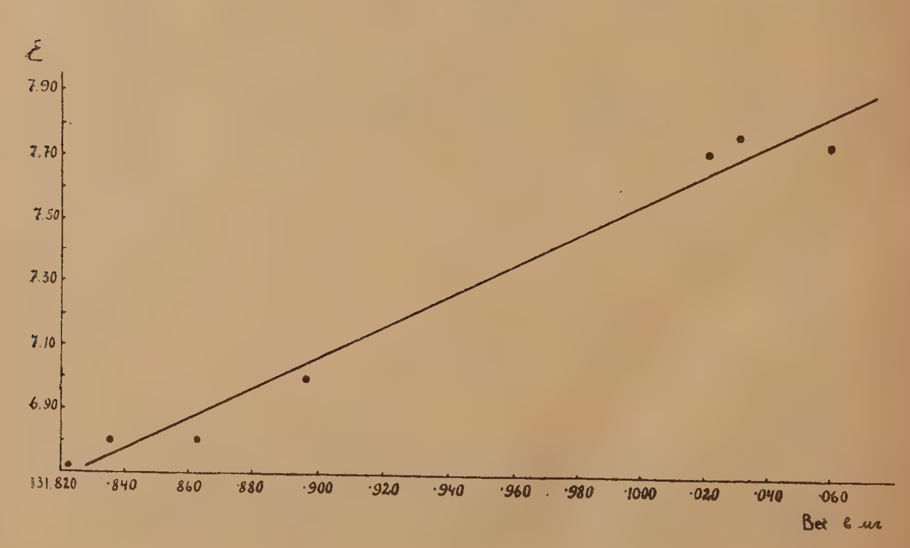
$r = 4.3$ см
$d = 0.500$ см
$S/d = 128$

Таблица 9

Условия измерений те же, что и у первого образца.

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теоретич. с поправк. на краевой эффект в см	C_x измер. в см	$C'_x = C_x - C''_0$ в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
1	21/VI	10.20	64.6	63.8	6.25	100.995	24.5	сухого 100.995	6.23
2	22/VI	10.20	64.3	63.5	6.22	—	24.0	101.070	6.26
3	20/VI	10.20	64.7	63.9	6.26	101.070	22.0	101.074	6.35
4	17/VI	10.20	65.6	64.8	6.35	101.074	20.0	—	—

Результаты измерений образца № 8 представлены в табл. 10 и фиг. 7.



Фиг. 7.

Таблица 10

Образец № 8 — Кровельный сланец — шифер (Груз. ССР, река Инцоби Секора)

Условия измерений те же, что и у первого образца, $r = 4.85$ см, $d = 0.390$ см, $S/d = 202$

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теоретич. с поправк. на краевой эффект	C_x измер, в см	$C'_x = C_x - C''_0$ в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
1	2/VII	16.08	108.8	108.0	6.71	131.822	26.8	сухого 131.822	6.71
2	4/VII	16.08	110.3	109.5	6.80	131.835	27.8	.835	6.80
3	3/VII	16.08	110.3	109.5	6.80	131.863	25.8	.863	6.80
4	25/VI	16.08	109.5	108.7	6.75	131.888	24.5	.888	6.75
5	11/VII	16.08	113.4	112.6	7.00	131.895	24.8	.895	7.00
6	9/VII	16.08	125.1	124.3	7.73	132.020	25.0	132.020	7.73
7	9/VII	16.08	126.1	125.3	7.78	132.030	25.0	.030	7.78
8	10/VII	16.08	125.2	124.4	7.74	132.060	25.8	.060	7.74

Результаты измерений образца № 9 представлены в табл. 11 и фиг. 8.

Таблица 11

Образец № 9 — Кровельный сланец — шифер (Ларсовское месторождение, Сев. Кавк.)

Условия измерений те же, что и у первого образца. $r = 4.85$ см, $d = 0.406$ см, $S/d = 182$

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теоретич. с поправк. на краевой эффект в см	C_x измер. в см	$C'_x = C_x - C''_0$ в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
1	20/VI	15.48	118.6	117.8	7.54	126.585	21.0	сухого 126.585	7.54
2	22/VI	15.48	118.8	118.0	7.62	126.590	24.5	.590	7.62
3	21/VI	15.48	120.5	119.7	7.73	126.595	23.5	.595	7.73
4	20/V	15.48	120.8	120.0	7.75	126.602	22.5	.602	7.75
5	17/V	15.48	121.8	121.0	7.81	126.605	23.5	.605	7.81
6	21/V	15.48	122.0	121.2	7.83	126.607	22.5	.607	7.83
7	23/V	15.48	122.6	121.8	7.86	126.616	22.5	.616	7.86
8	25/V	15.48	124.3	123.5	7.97	126.622	21.0	.632	7.93
9	26/V	15.48	123.1	122.3	7.99	126.622	23.0	630	8.05
10	28/V	15.48	124.9	124.1	8.01	126.630	23.0	—	—
11	29/V	15.48	126.0	125.2	8.08	126.630	23.5	—	—

Результаты измерений образца № 10 представлены в табл. 12 и фиг. 9.

Таблица 12

Образец № 10 — Песчаный аргелит (почва угольных пластов)

Характеристика образца: песчаник тонкозернистый или песчанистый аргелит (глинистый сланец), слегка углистый, сильно глинистый, с разнородными зернами от 0.07 мм до менее 0.01 мм. Песчаные зерна, кварцевые, преобладает глинистая масса

Условия измерений те же, что и у первого образца.

$r = 3.53$ см
$d = 0.395$ см
$S/d = 108$

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теоретич. в см	C_x измер. в см	$C'_x = C_x - C''_0$ в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
								сухого	
1	9/VII	8.66	48.7	47.9	5.53	63.063	25.0	63.063	5.53
2	10/VII	8.66	50.9	50.1	5.78	.081	26.0	.081	5.78
3	29/VI	8.66	51.4	50.6	5.84	.085	26.3	.085	5.84
4	11/VII	8.66	55.9	54.1	6.24	.095	25.0	.095	6.24
5	4/VII	8.66	58.4	57.6	6.65	.103	28.0	.103	6.65
6	9/VII	8.66	59.9	59.1	6.84	.150	25.0	.150	6.84
7	17/VI	8.66	62.9	62.1	7.17	.186	25.0	.186	7.17

Результаты измерений образца № 11 представлены в табл. 13 и фиг. 10.

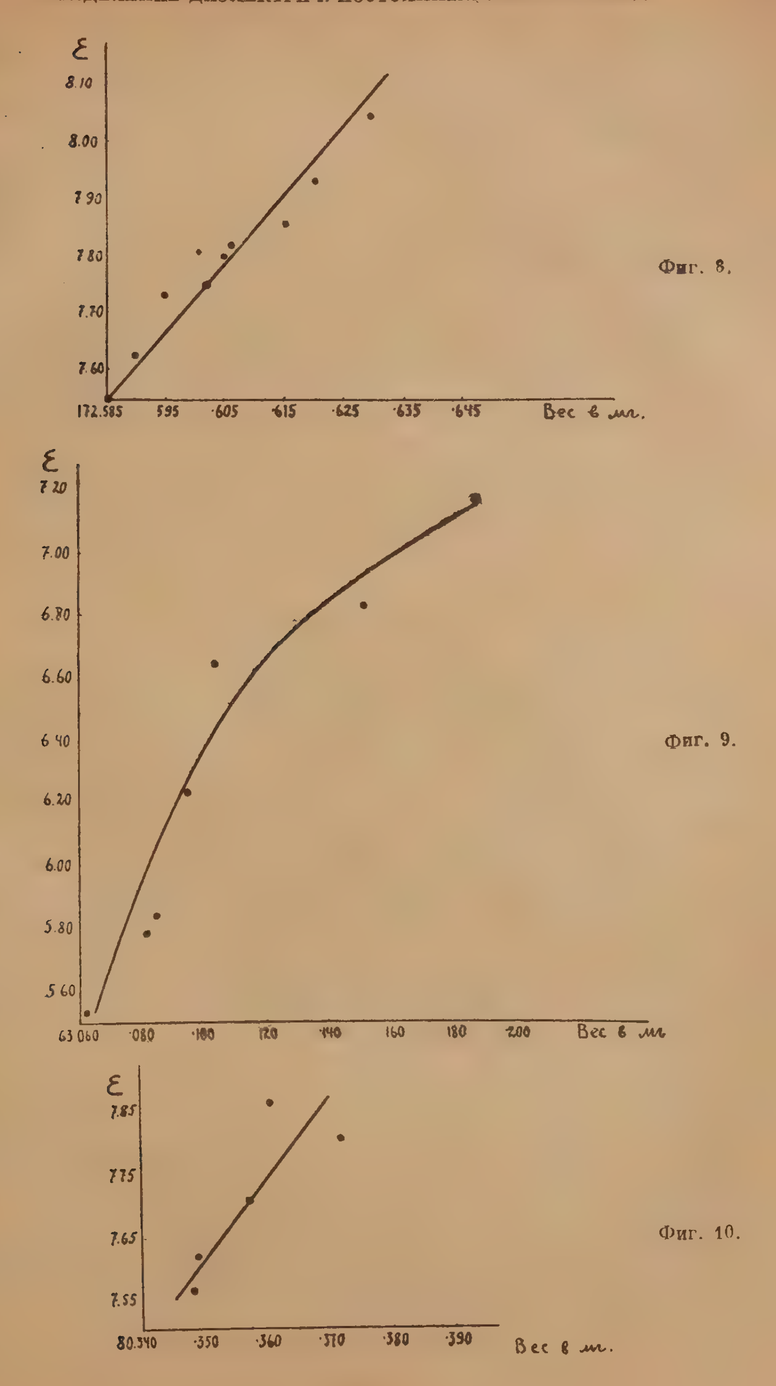
Таблица 13

Образец № 11 — Сильно измененная порода, не типичная. Много змеевика (серпентин), затем пирит, кальцит и стекло (змеевик)

Условия измерений те же, что и у первого образца.

$r = 4.85$ см
$d = 0.250$ см
$S/d = 295$

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теоретич. с поправк. на краевой эффект в см	C_x измер. в см	$C'_x = C_x - C''_0$ в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
						сухого		сухого	
1	28/V	24.52	186.4	185.6	7.57	80.348	23.0	80.348	7.57
2	15/V	24.52	187.8	186.97	7.62	349	22.0	349	7.62
3	29/V	24.52	189.8	189.0	7.71	357	21.0	357	7.71
4	20/V	24.52	193.8	193.0	7.87	360	22.5	360	7.87
5	25/V	24.52	192.2	191.4	7.80	372	22.5	372	7.80
6	20/VI	24.52	184.6	183.8	7.50	77.200	20.8	77.200	7.50
7	21/VI	24.52	189.5	188.7	7.70	207	24.0	77.207	7.70



Фиг. 8.

Фиг. 9.

Фиг. 10.

Результаты измерений образца № 12 представлены в табл. 14.

Таблица 14

Образец № 12 Гранит финляндский

$r = 3.53$ см
$d = 0.426$ см
$S/d = 108$

№ по пор.	Дата измерений	C_0 теоретич. в см	C_x измер. в см	$C_x' = C_x - C_0''$ в см	ε	Вес образца в граммах	Температура t	Ход значения ε в зависимости от изменения веса образца, вызываемого увеличением влажности	
1	3/VII	8.09	75.3	74.5	9.21	111.740	26.0	сухого 111.732	9.29
2	4/VII	8.09	77.5	76.7	9.48	111.740	28.0		
3	9/VII	8.09	76.0	75.2	9.29	111.732 сухого	25.0		

ВЛИЯНИЕ ВЛАЖНОСТИ

Перед измерением каждый образец горной породы высушивался до постоянного веса в сушильном шкафу (в течение до 50 час.) при максимальной температуре, до которой можно довести образец, не изменяя его как химических, так и физических свойств. Затем образец помещался в эксикатор для охлаждения до температуры, при которой производилось измерение его д. п. После охлаждения образец вкладывался, как это указано выше, в измерительный конденсатор и помещался в термостат для измерения при определенной температуре.

У различных образцов влияние влажности на их диэлектрическую постоянную оказывается весьма различным. У одного рода образцов, как например у образца № 8 (шифер грузинский), образца № 9 (шифер с Сев. Кав.), образца № 5 (лабрадорит) и образца № 10 (песчаный аргелит), влажность действует на диэлектрическую постоянную весьма значительно (см. фиг. 9, 5, 7, 8). Они сильно поглощают воду и особенно образцы: № 9—около 0.05% и образец № 10—около 0.02%.

Другого рода образцы, как например образец № 11 (змеевик), образец № 7 (гипс из Донбасса) и образец № 1 (мрамор белый), также поглощают влагу и показывают более слабое, но отчетливое влияние на диэлектрическую постоянную (см. фиг. 4, 6 и 10).

Наконец у третьего рода образцов, как например образец № 4 (мрамор сугомакский), влияние влажности на диэлектрическую постоянную отсутствует (см. табл. 6); почти так же ведут себя образец № 6 (гипс, неизвестного месторождения), образец № 12 (гранит финляндский), образец № 2 (мрамор серый) и образец № 3 (мрамор белый) (см. табл. 4, 14, 5 и 8), у которых влияние влажности сказывается в некотором колебании отдельных результатов.

Для наглядности полученные результаты сведены нами в виде одной табл. 15.

Таблица 15

	Наименование образца	Диэлект. пост. сухих образцов ε	Влияние влажности на ε
1	Образец № 1, мрамор белый (месторождение неизвестно)	8.24	Слабое влияние (фиг. 4
2	Образец № 2, мрамор серый (Уфалейское месторожд.)	8.22	Не замечено
3	Образец № 3, мрамор белый (месторожд. неизвестно)	8.04	» »
4	Образец № 4, мрамор белый (Сугомакское месторожд.)	6.60	Нет
5	Образец № 5, лабрадорит (Головино, УССР)	7.82	Сильное (фиг. 5)
6	Образец № 6, гипс (месторожд. неизвестно)	6.21	Нет
7	Образец № 7, гипс (Донбасс, Артем. окр.)	6.25	Слабое (фиг. 6)
8	Образец № 8, кровельный сланец, шифер (р. Инцоби Секора, Груз. ССР)	6.71	Значительное (фиг. 7
9	Образец № 9, кров. сланец (шифер, Ларсовск. месторожд, Сев. Кавк.)	7.54	Сильное (фиг. 8)
10	Образец № 10, песч. аргелит (глинистый сланец)	5.53	Очень сильное (фиг. 9)
11	Образец № 11, змеевик с пиритом и кальцитом	7.57	Заметное (фиг. 10)
12	Образец № 12, гранит финляндск. (Финляндия)	9.21	Не замечено

У большинства минералов, образующих горные породы, ранее найденные значения диэлектрических постоянных лежат в пределах от 4 до 10. Для сухих горных пород диэлектрическая постоянная получается равной от 7 до 17. У исследованных нами образцов горных пород найденные нами значения диэлектрических постоянных лежат в тех же пределах.

Нефтяной Геолого-разведочный институт.

N. X. ZCHODRO AND N. M. MASLOV. A STUDY ON THE DIELECTRIC CONSTANTS OF ROCKS AND ON THEIR DEPENDENCE UPON MOISTURE

SUMMARY

The dielectric constants of some rocks have been measured using a current of 500-m wawelength. The measurements were carried out on rock samples at first in a dry state and subsequently under different conditions of humidity. For this purpose the samples were prepared as plane—parallel plates of the least possible thickness. The plates were jammed between two tin—foil circles in an ebonite press and the capacity $C_x = C_0'' + C_0' \cdot \varepsilon_x$ of the condenser thus formed was determined by the method of beats. The capacity C_0', of that part of the condenser, C_x which is equal $(C_x - C_0')$ but filled by vacuum, was calculated using the approximation:

$$C_0' = \frac{\pi r^2 + 0.4413 \cdot 2\pi r}{4\pi d},$$

were r is the mean radius of the tin—foil plates and d is the mean thickness of the sample. The part C''_0 — the capacity of the leads was obtained by special measurements and was found to be 0.83 cm.

Capacities C'_0 and C''_0 being thus determined, the dielectric constant of a sample was giwen by

$$\varepsilon_x = \frac{C_x - C''_0}{C'_0}.$$

The results of the measurements are represented in the following table:

	Sample	Dielect. const. ε for the dry samples	Effect of moisture on ε
1	№ 1, white marble (bed unknown)	8.24	Slight (fig. 4)
2	№ 2, grey marble (Ufaley bed)	8.22	Undetected
3	№ 3, white marble (bed unknown)	8.04	»
4	№ 4, white marble (Sugomak bed)	6.60	None
5	№ 5, labradorite (Golovino bed, Ukraine)	7.82	Strong (fig. 5)
6	№ 6, gypsum (bed unknown)	6.21	None
7	№ 7, gypsum (Artemovsk district, Donietz Basin)	6.25	Slight (fig. 6)
8	№ 8, roof slate (Intzobi Secora bed Georgia)	6.71	Appreciable (fig. 7)
9	№ 9, roof slate (Lars bed, North Caucasus)	7.54	Strong (fig. 8)
10	№ 10, arenaceon argillite (argillaccons slate)	5.53	Very strong (fig. 9)
11	№ 11, serpentine containing pyrite and calcite	7.57	Appreciable (fig. 10)
12	№ 12, Finnish granite	9.21	Unknown

In addition, controll observation of d. c. have been made for some grades of glass and of ebonite for the purpose of determining the apparatus constants and also by way of Checking the performance of the set-up. The results obtained were in good agreement with earlier data.

For most minerals constituting rocks the earlier values of dielectric constants are confined to the limits of from 4 to 10. For dry rocks the dielectric constants fluctuate between 7 and 17. For the samples of rocks investigated by the authors the values of the dielectric constants have been found to lie within the same limits.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ФОСФОРНАЯ КИСЛОТА КАК КОНДЕНСИРУЮЩИЙ АГЕНТ

А. Е. ЧИЧИБАБИНА

До самого последнего времени фосфорная кислота поразительно мало применялась в органической химии. В качестве же конденсирующего агента, она, можно сказать, вовсе не применялась еще десять лет назад, хотя ее ангидрид нашел ограниченное, но прочное применение в ней, начиная с работы Гемилиана в 1874 г., и занял свое определенное место в ряде конденсирующих агентов.

В последние годы проблема фосфора приобрела огромное значение для агрономии, и в связи с этим фосфорная кислота начала приготовляться в технике в очень больших количествах; можно ожидать, что уже в непродолжительном будущем она сравняется по дешевизне с серной кислотой, если не превзойдет последнюю. Поэтому имеются основания думать, что в будущем она вытеснит серную кислоту сполна или частично во всех тех случаях, когда применение фосфорной кислоты может представить какие-либо преимущества перед серной.

Ввиду сказанного весьма настоятельным делом является тщательное изучение свойств фосфорной кислоты вообще и в частности ее отношений к различным классам органических веществ.

В последнее время появилось несколько исследований свойств фосфорной кислоты, а также ряд патентов на применение ее для получения различных органических веществ при реакциях отщепления воды, этерификации, полимеризации и пр. Однако, можно все же удивляться незначительному числу таких исследований. За последние десять лет имеется лишь несколько десятков патентов этого рода и лишь единичные исследования отношений фосфорной кислоты к органическим веществам. В числе патентов, правда, имеется несколько странный американский патент Дрейфуса на применение фосфорной кислоты во всех тех случаях, когда для органических реакций применяется серная кислота.

По отношению к применению фосфорной кислоты для реакций конденсации, кроме вышеуказанного патента Дрейфуса, пока имеется совершенно ничтожное количество литературных указаний[1]. Значительно больше можно найти патентных указаний[2], причем, однако же, в ряде

[1] Contardi, Gazz. chim. ital., **51**, I, 109 (1921); Melamed, Rosenthal, Z. angew. Chem., **36**, 333 (1923); Bogert, Science, № 4, **77**, 125 (1933); Uschida, Takata, Chem. Cbl., **1933**, II, 1533.

[2] Howards Sons Limit., J. W. Blayden, DRP 400969, EP 200151 (заявлено в 1922 г., выд. в 1923 и 1924 гг.); J. G. Farb. Ind., DRP 495717, Chem. Cbl., **1930**, II, 934; Rhein Kampferfabrik, Chem. Cbl., **1930**, II, 934, Holl. Pat. 31400, Chem. Cbl., **1934**, I, 767, Fr. Pat. 657411, Chem. Cbl., **1930**, I, 2009; Scher. Kahlb. Fr. Pat. 723377, Chem. Cbl., **1932**, II, Amer. Pat. 1933, 775.

случаев фосфорная кислота лишь упоминается наряду с другими конденсирующими агентами, и лишь в нескольких находится сколько-нибудь обстоятельное описание реакций с применением фосфорной кислоты. Из них первым по времени является патент Howards Sons Limited, J. W. Blayden'a на получение тимола из изопропилового алкоголя и м-крезола (1923—1924 гг.), описание которого являлось долго единственным, довольно подробно описанным случаем применения фосфорной кислоты для алкилирования фенолов. В американском патенте (заявл. в 1931 г.) содержится описание бутилирования метиловых эфиров крезолов с помощью изобутилена, и несколько позднее (1932 г.) был заявлен патент Rheinische Kampferfabrik, в котором описывается бутилирование метилового эфира м-крезола третичным бутиловым алкоголем.

Уже первые, произведенные мною несколько лет назад, опыты с фосфорной кислотой как конденсирующим средством показали, что фосфорная кислота является интересным агентом конденсации, так как она проявляет особенности, дающие ей во многих случаях преимущества перед другими агентами конденсации. Начатые более года назад систематические исследования уже дали ряд результатов, вполне подтверждающих вывод об интересных свойствах фосфорной кислоты как конденсирующего агента.

В настоящей статье излагаются результаты опытов алкилирования фенолов и их простых эфиров. Главные результаты их можно резюмировать следующим образом.

1. Фосфорная кислота является превосходным конденсирующим агентом для алкилирования фенолов и их простых эфиров при помощи третичных и вторичных алкоголей. Особенно ценные результаты она дает при алкилировании третичными спиртами, давая превосходные выходы алкилированных продуктов даже в тех случаях, когда алкилирование с другими агентами дает мало удовлетворительные результаты.

2. Из первичных спиртов легко реагируют лишь спирты типа бензилового алкоголя. С другими первичными спиртами алкилирование идет значительно хуже, чем с третичными и вторичными, и обычно происходит лишь при температурах, при которых имеет место изомеризация первичных алкоголей во вторичные или третичные.

3. Хорошо идет алкилирование также и с этиленовыми углеводородами, особенно—с разветвленными цепями у двойной связи. При этом к ароматическому ядру радикал присоединяется также при помощи третичного или вторичного атома углерода.

4. Алкилирование можно производить также при помощи вторичных и, особенно хорошо, третичных галоидных алкилов.

5. При алкилировании с помощью фосфорной кислоты алкил обычно входит почти исключительно в орто-положение к гидроксилу или алкоксилу. Пара-изомеры при низких температурах получаются лишь в ничтожных количествах, а с третичными радикалами их получается немного и при более высоких температурах.

6. С эквимолекулярными количествами реагирующих веществ в случае одноатомных фенолов обычно лишь в ничтожных количествах образуются и диалкилированные продукты.

7. Присутствие радикала в пара-положении не мешает алкилированию. Так, в противоположность бутилированию с серной кислотой[1], п-крезол отлично бутилируется с помощью фосфорной кислоты.

8. Отлично бутилируется с третичным бутиловым спиртом также

[1] Mayer H., Bernhauer K., Monatshr. 53/54, 721 (1929).

и о-крезол. Наоборот, при бензилировании о-крезол дает смесь изомеров, в которой лишь в ничтожном количестве содержится о-бензил-о-крезол и в несколько большем количестве—пара-изомер. Главным продуктом здесь является дибензилкрезол (повидимому, также смесь изомеров). Возможно, что здесь, наряду с нормальным алкилированием, происходит алкилирование метильной группы, подобное наблюденной Шорыгиным[1] при изомеризации бензилового эфира о-крезола под влиянием металлического натрия, или здесь имеет место изомеризация радикала бензила в о-толил и образование о-толил-о-крезола[2].

CH_3 CH_3 OH

Быть может также алкилированием в метильной группе объясняется образование изомеров и полиалкилированных продуктов при алкилировании несимметрического ксиленола.

9. При алкилировании фенолов образуются в небольшом количестве нейтральные продукты. В большинстве случаев это смесь простых эфиров исходных и алкилированных фенолов, а иногда в них, повидимому, содержатся и ненасыщенные углеводороды.

10. Почти во всех случаях фосфорная кислота, взятая в реакцию, может быть регенерирована, иногда простым упариванием, в других случаях упариванием с прибавлением небольших количеств азотной кислоты для окисления остающихся органических веществ. В наших опытах мы применяли фосфорную кислоту, много раз регенерированную с таким же успехом, как нерегенерированную.

ЧАСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ

Для алкилирования применялась фосфорная кислота уд. веса от 1.70 до 1.87, во многих случаях 1.83—1.85 в количестве 400 г на грамм-молекулу фенола или эфира. Спирты обыкновенно брались в небольшом избытке (до 10%) против теоретического количества. В большинстве случаев половина фосфорной кислоты смешивалась с фенолом или эфиром, а вторая половина—с алкилирующим веществом. Смешивание производилось осторожно, при перемешивании в охлаждении. Если алкилирующее вещество не смешивается с фосфорной кислотой, то вся кислота смешивалась с фенолом.

Реакция производилась в колбе, снабженной обратным холодильником, термометром, мешалкой и капельной воронкой. В колбу, нагреваемую на бане, вносилась смесь фенола с фосфорной кислотой, и при необходимой температуре приливалась по каплям из делительной воронки смесь алкилирующего вещества с фосфорной кислотой или несмешивающееся алкилирующее вещество. По окончании прибавления нагревание и перемешивание продолжались еще несколько часов. В сумме нагревание обыкновенно продолжалось 8—10 часов.

Во многих случаях непрореагировавший исходный фенол можно было хорошо выделить из продукта реакции обработкой эфирного раствора

[1] Ber., 58, 2028 (1925).
[2] См. напр., Tiffeneaux, Delange, C. R., 137, 573 (1903).

продукта 20%-ным раствором едкого натра. Отделение от нейтральных продуктов достигалось обработкой продуктов кляйзеновской смесью и экстракцией нейтральных продуктов петролейным эфиром.

Бутилирование мета-крезола. о-бутил-м-крезол (1-метил-3-окси-4-трет. бутилбензол). Бутилирование мета-крезола было первой изученной мною реакцией этого рода. Целью исследования было получение о-бутил-м-крезола, метиловый эфир которого был известен давно, но который оставался неизвестным до этого.

Вышеуказанный метиловый эфир, динитропроизводное которого известно под названием амбреттового мускуса, обычно получается в технике по способу Баура[1], открывшего последний, а именно действием хлористого третичного бутила или хлористого изобутила на метиловый эфир мета-крезола в присутствии хлористого алюминия. Однако, строение, приписанное этим соединениям Бауром, было неверно. Неверным оказалось и строение, приписанное ему Барбье[2]. Лишь недавно Зейде и Дубинин[3] доказали неопровержимо, что он имеет строение метилового эфира о-бутил-м-крезола.

Относительно бутилирования самого мета-крезола в литературе имеются следующие указания. Баур[4] получил нагреванием мета-крезола с изобутиловым алкоголем и хлористым цинком жидкость с темп. кипения 230—240°, состава бутилкрезола; позднее Г. Мейер и Бернгауер[5], бутилированием мета-крезола изобутиловым спиртом при 70° с 70%-ной серной кислотой, получили бутилкрезол с тою же температурой кипения. Этим бутилкрезолам авторы приписали строение п-третично-бутил-м-крезола на том основании, что при нитрации его и его метилового эфира получаются жидкие нитропродукты.

Недостаточность этого основания и широкие пределы кипения, свидетельствующие о неоднородности продуктов вышеназванных авторов, побудили меня повторить опыт бутилирования при точном соблюдении условий Мейера и Бернгауера[6]. В реакцию было взято 54 г мета-крезола и 37.5 г изобутилового алкоголя.

При фракционировании продукта при 12 мм получены следующие фракции: 1) до 95° (главным образом мета-крезол)—10.5 г; 2) 95°—110° (немного); 3) 110—122°—12.5 г. Фракции 2) и 3) содержали бутилкрезолы, но выход их незначителен. Так как и крезольная фракция была мала, то можно было предположить, что главными продуктами являются сульфокислоты. Действительно, при перегонке водно-кислотной жидкости, когда температура достигла 115°, начал перегоняться м-крезол. Таким образом было получено 28 г чистого м-крезола. Главная масса изобутилового алкоголя, повидимому, превратилась в углеводороды, изобутилен, запах которого был сильно слышен во время бутилирования, и его полимеры.

При новой фракционировке высших фракций было получено 11 г продукта, кипевшего при 12 мм при 116—120°. Она была очищена от крезола обработкой в эфирном растворе едким натром, и от нейтральных продуктов—кляйзеновской смесью, как описано ниже. После этого она кипела почти вся при 122—123° при 16 мм, и лишь очень небольшая часть—выше

[1] Baur, Ber., **27**, 1616 (1894); **33**, 2562 (1900), DRP 62362.
[2] Helv. chim. Acta, **11**, 152, 157 (1928).
[3] Ж. общ. химии, **2**, 456, 472, см. также Crepeller, Helv. Chim. Acta, **11**, 426 (1928).
[4] Ber., **27**, 1614 (1894).
[5] l. c.
[6] l. c., стр. 736.

этой температуры. При охлаждении снегом она затвердевала, но при комнатной температуре снова плавилась. При взбалтывании с ледяной водой она застывала в кристаллическую массу, но при комнатной температуре частично расплавлялась. Отжатием между фильтровальной бумагой получен нижеописанный гидрат о-бутил-м-крезола.

Таким образом, в условиях Г. Мейера и Бернгауера происходит главным образом сульфирование м-крезола. Противно утверждению авторов, бутилкрезольная фракция содержит главным образом о-бутил-м-крезол, а не пара-изомер. Выделить последний в чистом виде не удалось.

Совершенно неудачные результаты дали опыты бутилирования м-крезола изобутиловым и трет. бутиловым алкоголями при помощи крепкой серной кислоты в условиях патентов на приготовление тимола из изопропилового и пропилового алкоголей и м-крезола[1]. Было сделано несколько опытов: 1) при точном соблюдении условий патента (сульфирование ниже 100°) с изобутиловым алкоголем; 2) сульфированием крезола при 120°; 3) смешением крезола с серной кислотой при охлаждении и осторожном прибавлении трет. бутилового спирта также на холоду. В первых двух случаях главными продуктами были сульфокислота крезола и углеводороды. В третьем случае также получалась сульфокислота крезола, много продуктов, нерастворимых в едких щелочах, и лишь ничтожная фракция, содержащая высококипящие фенолы, кипевшие в главной части выше о-бутил-м-крезола.

Так как опыты Баура с хлористым цинком не обещали хороших результатов, то были начаты опыты с фосфорной кислотой.

В цитированном патенте на получение тимола с фосфорной кислотой и изопропиловым алкоголем указывается, что при низких температурах (70—80°) получается главным образом тимол, а при 150° п-изопропил-м-крезол с температурой плавления 114°. Произведенные мною опыты с трет. бутиловым спиртом показали, что здесь реакция идет хорошо лишь при низких температурах. Очень хорошие результаты получаются с фосфорной кислотой уд. в. 1.75—1.85 при 50—60°, при 70—80° они уже уменьшаются, а при 150° выходы бутилкрезолов очень плохи, причем продукт представляет трудно разделимую смесь изомеров. Привожу описание одного из опытов.

В колбу взято 300 г. фосфорной кислоты уд. в. 1.83 и медленно через капельную воронку прилито 120 г триметилкарбинола при перемешивании и охлаждении смеси холодной водой (но не льдом). В другой колбе, с мешалкой и обратным холодильником, было смешано 120 г мета-крезола и 300 г той же фосфорной кислоты. Вторую смесь нагревают до 50° и приливают по каплям через капельную воронку в течение 4—5 часов в первую смесь при сильном перемешивании, поддерживая температуру 50°. Затем нагревают до 60° и продолжают перемешивание еще 4 часа. Под конец температура была поднята до 65°.

По окончании нагревания продукт был вылит в делительную воронку, разбавлен равным объемом воды со льдом и после отстаивания верхний слой отделен от фосфорной кислоты. Последняя, по разбавлении еще четырьмя объемами воды, экстрагировалась несколько раз эфиром. Эфирный раствор прилит к главному продукту. Эфирный раствор встряхивался с небольшим количеством воды и затем три раза, последовательно, с 50, 30 и 30 см³ 20%-ного раствора едкого натра[2]. Полученный подкисле-

[1] Bad. Soda Anilin Fabr., DRP 350809, Chem. Cbl., **1922**, IV, 156; DRP 379952, Chem. Cbl., **1924**, I, 1102.

[2] Ср. Vavon, Zacharia, Chim. Ind., **21**, № 2 bis, стр. 257; Vavon, Poira, Ann. Office Nat., Combustibles Liquides, 4. 997, Chem. Cbl., **1930**, II, 235.

нием щелочного раствора продукт содержит не вошедший в реакцию крезол и лишь незначительное количество высококипящих фенолов (бутилкрезолов).

Так, в одном из опытов с вышеуказанными количествами при перегонке при 17 мм получены фракции: 1) 97—102° (м-крезол)—40.2 г и 2) 102—140°—4.3 г. Выше кипящая фракция после встряхивания с 20%-ным едким натром может быть присоединена к эфирному раствору бутилкрезолов.

От эфирного раствора отгонялся эфир. Остаток растворен в петролейном эфире и встряхивался с 200 см³ кляйзеновской смеси[1]. Оба слоя разделялись и щелочной слой встряхивался еще два раза с петролейным эфиром. Соединенные петролейноэфирные растворы после промывания водой, сушения сернонатриевой солью и отгонки эфира оставляют небольшой остаток нейтральных продуктов. При перегонке они переходят в широких пределах.

В одном опыте их получилось 12.8 г. При 16 мм они дали фракции: 1) до 70°—2.2 г; 2) 70—82°—4.5 г; 3) 125—135° —4.7 г; 4) остаток в колбе 1 г. Судя по запаху и температурам кипения, 2-я фракция содержит трет. бутиловый эфир мета-крезола, а 3-я—трет. бутиловый эфир бутилкрезола, получение и свойства которых будут описаны полнее.

Щелочной раствор сильно разбавлялся водой и подкислялся соляной кислотой. Выделившиеся фенолы, взятые в эфир, отделялись, и водный слой еще два раза экстрагировался эфиром. Соединенные эфирные растворы сушились безводной сернонатриевой солью; эфир отгонялся, и остаток разгонялся в вакууме. При 14 мм давления получены следующие фракции: 1) до 121°—менее 1 г; 2) 121—123°—127.2 г; 3) 123—128°—50.1 г; 4) 128—140°—9 г; 5) выше 140°—4.8 г.

Фракции 1 и 2 при охлаждении льдом застывали сполна, но отчасти расплавлялись при обыкновенной температуре. Фракция 3 также в ледяной воде застывает (легко при внесении кристаллика из первых фракций), а при комнатной температуре плавится сполна. Фракция 4, очень густая, не застывает в охладительной смеси даже при заражении. Последняя фракция—еще гуще.

Кристаллический фенол представляет о-бутил-м-крезол. В таком неочищенном виде он слегка желтоват, и окраска при стоянии на воздухе усиливается. Полной очистки можно достигнуть превращением его в гидрат. Для этого низшие фракции (1 и 2 вместе, а 3 отдельно) взбалтывают с водой, причем происходит легкое разогревание. Смесь охлаждают ледяной водой и оставляют в ней стоять несколько часов. Образовавшиеся кристаллы сушат легким отжиманием на фильтровальной бумаге, а затем отжимают между бумагой посредством пресса, причем в бумагу переходит немного желтоватого масла, а отжатые кристаллы совершенно белы и не окрашиваются при стоянии на воздухе в течение долгого времени. Извлекая из бумаги эфиром масло, присоединяя его к полученному при отсасывании и подвергая новой перегонке и превращению низших фракций в гидрат, можно получить еще небольшое количество кристаллов чистого гидрата. При повторных операциях в конце концов получается немного масла, не дающего кристаллического гидрата.

Чтобы из гидрата получить чистый бутилкрезол, гидрат обрабатывают эфиром, эфирный раствор сушат безводной сернонатриевой солью. Эфир отгоняют, а остаток перегоняют в вакууме. При 16 мм о-третичнобутил-

[1] Claisen, Ann., **418**, 96 (1918); **442**, 224 (1925).

м-крезол перегоняется при 121—122° в бесцветную пахучую жидкость, затвердевающую при охлаждении льдом. Он плавится при 23°.

0.2217 г вещества: CO_2 — 0.6529 г; H_2O — 0.2007 г
$C_{11}H_{16}O$ Вычислено % С — 80.49, Н — 9.88
Найдено % С — 80.32, Н — 9.93

На воздухе о-бутил-м-крезол притягивает влагу и сначала расплавляется, а затем превращается в кристаллы гидрата. Если взять на кончик палочки небольшую каплю расплавленного бутилкрезола, то на воздухе быстро образовываются призматические кристаллы гидрата. В виде крупных кристаллов можно получить гидрат, если бутилкрезол, растворенный в небольшом количестве эфира, вылить в стакан с достаточным количеством воды и оставить его в спокойном месте. Смешивая бутилкрезол с определенным количеством воды и определяя его температуру плавления, можно было убедиться, что в гидрате на молекулу бутилкрезола содержится одна молекула воды. Гидрат плавится при 37°, разлагаясь на свои компоненты. Прибавление органических растворителей: эфира, спирта, ацетона, четыреххлористого углерода, бензола, петролейного эфира и пр. также разлагает гидрат. Бутилкрезол растворяется в едких щелочах, но из щелочных растворов эфир его сполна извлекает.

При метилировании бутилкрезола метилсульфатом в щелочном растворе и получается метиловый эфир с температурой плавления 24°, а нитрацией последнего—амбреттовый мускус. При нитрации бутилкрезола получается, в качестве побочного продукта, тот же метилбутилхинон, который образуется и при получении амбреттового мускуса[1] (опыты нитрации бутилкрезола будут описаны позднее). Эти результаты с несомненностью устанавливают строение бутилкрезола как о-бутил-м-крезола.

Бутилирование с помощью изобутилового алкоголя. Приведу вкратце описание одного из опытов.

В реакцию было взято 54 г м-крезола, в смеси с 100 г фосфорной кислоты уд. веса 1.87 и прибавлена смесь 40 г изобутилового алкоголя с 100 г той же фосфорной кислоты. Смесь нагревалась $6^1/_2$ часов при 60° и $1^1/_2$ часа при 70—80°. В результате вышеописанной обработки получены следующие продукты.

А. Из 20% щелочи при 13 мм следующие фракции: 1) 88—96° (и лишь несколько капель до 102°)—23.3 г; 2) 102—118° (и немного до 125°)—11.7 г; остаток в колбе (при нагревании замечались следы разложения)—3.5 г. Фракция 2 имела запах, отличный от запаха о-бутил-м-крезола и при новой разгонке дала фракции при 13 мм: 1) 98—104°—6.3 г; 2) 104—125°—4.4 г; с водой эта фракция не давала кристаллического гидрата.

Б. Из петролейного эфира получено $1^1/_2$ г вещества с запахом моркови.

В. Из кляйзеновского щелочного раствора при перегонке при 15 мм вначале гнался низко кипящий продукт с запахом изобутилового алкоголя. Кроме того, получены фракции: 1) 118—126° (главн. образом 114—126°)—18.6 г; 2) 126—136°—4 г; 3) небольшой остаток. Фракция 1 с ледяной водой частью превратилась в кристаллический гидрат. После отсасывания и отжимания получено 8.5 г чистого гидрата о-бутил-м-крезола. Маслообразный фильтрат кипел при 12 мм при 111—116° и после перегонки выделял с ледяной водой лишь следы гидрата.

Бутилирование мета-крезола трет. бутиловым алкоголем при 150°. В реакцию взято 17.8 г крезола, 7 г триме-

[1] Зейде и Дубинин, l. c.

тилкарбинола и 50 г сиропообразной фосфорной кислоты. Нагревание продолжалось 4 часа при 150°. Нейтральных продуктов получилось 1.9 г. Из кляйзеновской смеси получены при 16 мм фракции: 1) 110—127°—6.1 г; 2) 127—140°—3.4 г. Фракция 1 содержала много о-бутил-м-крезола. Фракция 2, густая, не давала гидрата и не кристаллизовалась ни при обыкновенной температуре ни при охлаждении.

Бутилирование м-крезола третичным хлористым бутилом. К 36 г м-крезола и 135 г фосфорной кислоты уд. веса 1.85 приливались из капельной воронки в течение 2½ часов при температуре 48—50° 36 г третичного хлористого бутила. Затем смесь нагревалась еще 6 часов при 60—65°.

Эфирный раствор продукта перед обработкой едким натром был промыт раствором соды. Из раствора в едком натре выделено 14.8 г непрореагировавшего крезола. Нейтральных продуктов получено 2.1 г с температурой кипения 90—110° при обыкновенном давлении; выше 105° началось выделение хлористого водорода. Остаток в колбе весил 3.2 г.

Из кляйзеновской жидкости получено 24.5 г продукта с температурой кипения 110—114° при 9 мм. Продукт бесцветен, при охлаждении льдом застывает сполна. Остатка в колбе почти нет.

Бутилирование о-крезола. Третичнобутил-о-крезолы. Конденсация о-крезола с третичным хлористым бутилом и с изобутиловым алкоголем была произведена Бауром[1] и позднее Дарзенсом и Ростом[2]. Полученному при этом продукту авторы дают строение п-бутил-о-крезола

C_4H_9—(бензольное кольцо)—OH, CH_3

То же строение приписывают Г. Мейер и Бернгауер[3] бутилкрезолу, полученному ими конденсацией о-крезола с изобутиловым спиртом в присутствии 70%-ной серной кислоты. Баур полагал, что то же соединение получается диазореакцией из амина, полученного Эффронтом[4] бутилированием о-толуидина, нагреванием хлористоводородного о-толуидина с изобутиловым спиртом, и Бауром,—восстановлением вещества, которому Баур приписал строение 6-нитро-1-метил-3-бутилбензола. Бутилкрезол описывается как желтоватая густая жидкость с температурой кипения 235—237°, при нитрации в ледяной уксусной кислоте, дающая нитропродукт с температурой плавления 85—86°. Ни в одной из вышеперечисленных работ не имеется доказательств однородности продуктов, полученных бутилированием о-крезола.

Конденсация о-крезола с третичным бутиловым спиртом в присутствии фосфорной кислоты производилась следующим образом.

В реакцию взято 54 г о-крезола в смеси с 100 г фосфорной кислоты уд. веса 1.87. К этой смеси в течение трех часов была прилита смесь 40 г триметилкарбинола с 100 г фосфорной кислоты при 60°. Перемешивание продолжалось еще 5 часов при 60—62°.

В отличие от бутил-м-крезолов, бутилированный продукт из о-кре-

[1] Baur, Ber., **24**, 2838 (1891); **27**, 1615 (1894).
[2] C. R., **152**, 608 (1911).
[3] l. c.
[4] Ber., **17**, 2320 (1884).

зола не мог быть отделен от последнего обработкой 20%-ным едким натром. Продукт извлекается водой, если нет достаточного избытка щелочи; при значительном же избытке едкого натра выпадает кристаллический фенолят, нерастворимый в едкой щелочи и почти нерастворимый в эфире.

Отфильтрованный от фенолята и отделенный от водного щелочного раствора эфирный слой после отгонки эфира дал остаток, который был обработан кляйзеновской смесью.

Фенолы из кляйзеновской смеси дали при 15 мм следующие фракции: 1) 118—121°—2.3 г; 2) 121—125°—9 г; 3) 125—132°—3.2 г; 4) небольшой остаток в перегонной колбе.

Фенолы из едкого натра и кристаллического фенолята при 14 мм дали: 1) 105—121°—5.2 г (температура быстро поднималась, что указывает на незначительное количество непрореагировавшего крезола); 2) 121—125°—4.4 г; 3) 126—129°—9.9 г.

Все фракции подвергались, каждая отдельно, следующей обработке. Фракция обрабатывалась небольшим избытком 15%-ного едкого натра, затем нагревалась до растворения выпавшего фенолята. После этого прибавлялся равный объем 30%-ного едкого натра, и смесь оставлялась медленно застывать для кристаллизации фенолята.

Выпавший фенолят хорошо отсасывался через полотно и промывался небольшим количеством эфира. Затем он разбалтывался в эфире и снова отсасывался и промывался эфиром. Последняя операция повторялась еще раз. После этого фенолят представлял снежно-белые пластиночки; окрашенные примеси переходят в эфир.

Маточные растворы от всех фракций, кроме фракции 105—121°, содержавшей крезол, разлагались кислотой, выделившиеся фенолы брались в эфир; после отгонки эфира остаток подвергался снова вышеописанной операции с целью выделения кристаллического фенолята.

Полученный кристаллический фенолят был растворен в воде и разложен слабой серной кислотой. Выделившееся масло взято в эфир; эфирный раствор высушен сернонатриевой солью, и эфир отогнан. При перегонке остатка он сполна переходил при 122.5° при 14 мм. Получено 64.1 перегнанного бутилкрезола (78% теор.). Он был совершенно бесцветен и при охлаждении застыл в белую кристаллическую массу, плавящуюся при 27°. Кристаллы гигроскопичны и на воздухе расплываются. Они обладают сильным своеобразным запахом, отличным от запаха о-бутил-м-крезола.

0.2239 г вещества: CO_2 — 0.6589 г; H_2O — 0.2040 г
$C_{11}H_{16}O$ Вычислено % C — 80.49, H — 9.88
Найдено % C — 80.30, H — 10.07

В виду того, что в ряде других случаев вхождение бутильной группы в орто-положение для главного продукта реакции является доказанным, продукту можно приписать строение о-третичнобутил-о-крезола:

CH_3 $C(CH_3)_3$
OH

Из маточного раствора фенолятов выделены фенолы, не дававшие кристаллического фенолята в вышеописанных условиях. При их перегонке получены при 15 мм фракции: 1) 110—125°—1.5 г; 2) 125—140°—2.9 г; 3) немного густого остатка в колбе.

Бутилирование п-крезола. Баур[1], конденсировавший п-крезол с изобутиловым алкоголем в присутствии хлористого цинка, не дает относительно продукта никаких указаний, кроме того, что при нитрации он не дает кристаллического нитропродукта. Г. Мейер и Бернгауер[2] указывают, что в их условиях п-крезол вовсе не алкилируется.

В реакцию были взяты: 62.5 г п-крезола и 117 г фосфорной кислоты уд. веса 1.85; 2) 46 г триметилкарбинола и 117 г той же фосфорной кислоты. При смешении п-крезола с фосфорной кислотой при охлаждении смесь застывает в кристаллическую кашицу. Нагревание производилось 8 часов при 85—90°; 3 часа при 95—97°. Получено:

А. Нейтральных продуктов—5.4 г.

Б. Из щелочи п-крезола с т. к. 97—99° при 15 мм—10.7 г.

В. Из кляйзеновской смеси при 14 мм: 1) 118—119°—54.5 г; 2) 119—122°—14.8 г; 3) в колбе немного густого остатка.

Обе фракции застывали в белую кристаллическую массу. Первая фракция плавилась при 44°. Вторая фракция при вторичной перегонке перешла также при 118—119°, после чего плавилась при 44°; лишь в перегонной колбе осталось немного вышекипящего вещества, почти сполна застывшего при охлаждении.

0.1959 г вещества: CO_2 — 0.5771 г; H_2O — 0.1780 г
$C_{11}H_{16}O$ Вычислено % C — 80.49, H — 9.88
Найдено % C — 80.34, H — 10.04

Полученный бутилкрезол может иметь лишь строение о-третичнобутил-п-крезола:

CH_3
$C(CH_3)_3$
OH

В описанном опыте более высокая температура бралась в виду указания Мейера и Бернгауера на то, что в их условиях п-крезол не алкилируется. Однако качественный опыт показал, что бутилирование хорошо идет и с более слабой кислотой при 60—70°.

м-крезол и третичный амиловый алкоголь. 1) 40 г м-крезола и 75 г фосфорной кислоты уд. веса 1.86; 2) 33 г третичного амилового алкоголя и 75 г той же кислоты. Вторая смесь приливалась к первой в течение 3 часов при 60°, и нагревание продолжалось еще 5 часов при 60—65°. Получено:

А. Нейтральных продуктов неперегонных—15.3 г. Они содержали много низкокипящего продукта (повидимому—амилена). При 14 мм получены фракции: 1) 42—47°—5.7 г (при обыкновеном давлении перешла главным образом при 145—152°); 2) 47—120°—2.4 г.

Б. Из едкого натра—14.7 г м-крезола.

В. Из кляйзеновской смеси при 10 мм: 1) 116—119°—1.3 г; 2) 119—122°—20.2 г; 3) 122—126°—9.5 г; 4) выше 126°—2.5 г.

Фракция 119—122° представляет амилкрезол, которому как по аналогии с реакцией бутилирования, так и по температуре кипения следует приписать строение о-третичноамил-м-крезола. Она представляет жид-

[1] l. c.
[2] l. c.

кость с запахом, напоминающим запах о-бутил-м-крезола, хотя и менее интенсивным.

0.1985 г вещества: CO_2 — 0.5887 г; H_2O — 0.0184 г
$C_{12}H_{18}O$ Вычислено % С — 80.90, Н — 10.11
Найдено % С — 80.88, Н — 10.30

м-крезол и ментол. Взято 27 г м-крезола, 43 г ментола и всего 100 г фосфорной кислоты уд. веса 1.86. При всыпании измельченного ментола в фосфорную кислоту ментол сначала растворяется, но потом выпадают кристаллы, и жидкость густеет. Поэтому смесь не вливалась, но вносилась в течение 3 часов небольшими порциями в первую смесь, нагретую до 35°. Перемешивание продолжалось еще 5 часов при 60°. Получено:

А. Нейтральных продуктов: при 10 мм: 1) 40—50°—5.4 г; 2) 170—173°—3.0 г.

Б. Из щелочи: кроме непрореагировавшего м-крезола—5.4 г вещества, кипевшего при 9 мм при 180—187°, повидимому, представлявшего ментилкрезол, извлекающийся щелочью из эфирного раствора.

В. Из кляйзеновской жидкости: при 2½ мм при 60—70° перегналось 1.4 г; затем температура быстро поднялась до 152° и получены фракции: 1) 153—155°—26.7 г; 2) 156—164°—6.2 г.

Фракция 1 не застыла при охлаждении; она представляет очень густое масло, нерастворимое в воде, растворимое в органических растворителях, обладающее довольно сильным приятным запахом, имеющее состав ментилкрезола.

0.2005 г вещества: CO_2 — 0.5946 г; H_2O — 0.0186 г
$C_{17}H_{26}O$ Вычислено % С — 82.93, Н — 10.57
Найдено % С — 82.77, Н — 10.71

Симметрический ксиленол 1-3-5- и триметилкарбинол. Симметрический ксиленол с триметилкарбинолом дает лишь ничтожные выхода высококипящих фенолов. Так, в опыте с 61 г ксиленола после нагревания при 80—110°—7 часов и 120°—3 часа получилось из кляйзеновской жидкости менее 1 г продукта, кипевшего при 15 мм при 136°. Кроме неизмененного ксиленола получено 14 г нейтральных продуктов, кипевших в широких пределах. Главная фракция—7.3 г—кипела при 66—69° при 15 мм.

Несимметрический ксиленол 1-3-4- и триметилкарбинол. При алкилировании фенолов всеми известными способами обычно образуются их гомологи, у которых алкил находится в орто- или пара-положении к гидроксилу. Мета-изомеры образуются лишь в качестве побочных продуктов в ничтожных количествах. Так как в несимметрическом ксиленоле остается незамещенным лишь одно орто-положение, то можно было думать, что здесь единственным продуктом алкилировки будет гомолог ксиленола, содержащий алкил в орто-положении к гидроксилу. По той же причине можно было думать, что диалкилированный продукт вовсе не образуется или образуется в ничтожном количестве.

Однако опыты с несимметричным ксиленолом неожиданно показали, что получающийся нормальный продукт здесь значительно менее чист, чем в других случаях, выхода его значительно хуже, и что наряду с моноалкильными фракциями получается довольно значительное количество высококипящих фенолов. Причина этого явления мною до сих пор не выяснена. Одним из возможных объяснений представляется алкилиро-

вание в метильной группе, подобное наблюденному Шорыгиным[1] бензилированию для орто-крезола.

Было произведено несколько опытов, каждый раз с половиной моля ксиленола. Реакция производилась при температурах от 70 до 105°, причем результаты мало отличались между собой. Очистка продукта затрудняется тем обстоятельством, что обработкой 20%-ным едким натром не удается хорошо отделить продукт реакции от неизмененного ксиленола. Поэтому продукт обрабатывался недостаточным количеством едкого натра для полного превращения фенолов в феноляты, после чего фенолы из эфирного раствора подвергались обработке кляйзеновской смесью. Так, в одном из опытов продукт был обработан 30 см³ 20%-ного едкого натра. После обработки фенолов, оставшихся в эфире, кляйзеновской смесью из кляйзеновской жидкости были получены фракции: при 16 мм: 1) 105—115°—21.1 г; 2) 115—135°—22 г; 3) 135—160°—11.2 г; 4) остаток в колбе около 10 г.

Фракция 1 была снова обработана в эфирном растворе 6 см³ едкого натра, а остаток из эфира вместе с фракцией 2 подвергался фракционированной перегонке в вакууме. После трехкратной фракционировки была получена фракция, кипевшая при 125.5—126 при 17 мм—10.7 г, представлявшая густоватую жидкость, незамерзающую при охлаждении снегом и солью и имеющую сильный запах, напоминающий запах сафьяна.

0.1343 г вещества: CO_2 — 0.3974 г; H_2O — 0.1224 г
$C_{12}H_{18}O$ Вычислено % C — 80.90, H — 10.11
Найдено % C — 80.70, H — 10.13

Вещество с той же температурой кипения и с тем же запахом было получено мною несколько лет назад сплавлением с едким кали сульфокислоты строения:

CH₃ (вверху), $(CH_3)_3C$ (слева), CH_3 (справа), SO_3H (внизу) — бензольное кольцо

(неопубликованная работа).

Для бутилксиленола, полученного этим путем, совершенно несомненным является строение

CH_3 (вверху), $(CH_3)_3C$ (слева), CH_3 (справа), OH (внизу) — бензольное кольцо

Несимметрический ксиленол и изопропиловый алкоголь. Реакция несимметрического ксиленола с изопропиловым алкоголем дает результаты, совершенно подобные результатам с триметилкарбинолом. Обработка продукта реакции в эфирном растворе едким натром не ведет к хорошему разделению ксиленола от изопропилксиленола. Выхода изопропилксиленольной фракции не очень хороши и выфракционировать продукт с постоянной температурой кипения удается лишь со значительными потерями. И здесь также получаются высококипящие фракции. Произведено было три опыта с полумолярными количествами

[1] См. статью: о-крезол и бензиловый алкоголь.

при температурах: 1) 50—60°, 2) 75° и 3) 85°. Время нагревания: 1) 28 часов, 2) 10 часов и 3) 6 часов. Результаты опытов не отличаются резко между собой; лишь количество высококипящих фракций в третьем опыте было заметно больше, чем в двух остальных.

Повторной фракционировкой в вакууме удается выфракционировать фракцию, кипящую при 17 мм, при 127—130°.

0.1971 г вещества: CO_2 — 0.5809 г; H_2O — 0.1796 г
$C_{11}H_{16}O$ Вычислено % C — 80.45, H — 9.88
Найдено % C — 80.38, H — 10.12

Полученный изопропилксиленол, которому по аналогии с вышеописанным бутилксиленолом можно приписать строение

$$\text{(CH}_3)_2\text{CH}\;[\text{кольцо: CH}_3 \text{ сверху}, \text{CH}_3 \text{ справа}, \text{OH снизу}]$$

интересен своим запахом сафьяна (cuir de Russie). Так как изопропильная группа часто встречается в природных веществах, то представляется весьма вероятным, что именно присутствие этого фенола в дубильном экстракте березовой коры придает сафьяну этот характерный запах.

о-Крезол и бензиловый алкоголь. Относительно бензилирования о-крезола в литературе имеются следующие указания.

Шорыгин[1] действием хлористого бензила на о-крезолят натрия получил фенол с температурой плавления 51—52°, несомненно имеющий строение о-бензил-о-крезола. При действии же металлического натрия на бензиловый эфир о-крезола он получил вещество с температурой плавления 84—85°, для которого он с несомненностью установил тождество с о-оксидибензилом. Таким образом, здесь происходит изомеризация эфира, приводящая к бензилированию метильной группы о-крезола.

Г. Мейер и Бернгауер[2], бензилируя своим методом о-крезол, действием бензилового алкоголя, получили вещество, которому они приписали строение п-бензил-о-крезола. По их описанию это—копьевидные кристаллы из петролейного эфира, плавящиеся при 35°, дающие бензоильное производное с т. пл. 115° и щавелевый эфир с т. пл. 109°.

Позднее американские авторы[3], исследуя действие бензилового алкоголя на о-крезол, получили два бензилкрезола, плавящиеся при одинаковой температуре 49.5—50.5°, кристаллизующиеся из петролейного эфира в игольчатых кристаллах различного вида. Резким отличием двух бензил-о-крезолов, по указанию авторов, является отношение к 5%-ному раствору едкого кали, в котором п-бензил-о-крезол легко растворяется, тогда как о-бензил-о-крезол нерастворим даже в большом избытке. о-изомер кипит ниже п-изомера на 15° при 5 мм давления. Но главным продуктом является некристаллическое высококипящее дибензильное соединение.

Мною был произведен опыт с 108 г о-крезола, 108 г бензилового алкоголя и 400 г фосфорной кислоты уд. веса 1.86. Нагревание длилось 10 часов при 50°.

[1] Ber., **58**, 2028 (1926).
[2] l. c.
[3] Huston, Swartout et Wardwell, J. Am. Soc., **1931**, 52, 4484.

Маслообразный продукт реакции подвергался отгонке с водяным паром с целью удаления крезола. Неотогнавшийся продукт был перегнан в вакууме. При 12 мм была отогнана фракция 1) 180—186°—14.4 г. Затем при 1.5 мм были получены фракции: 2) 142—146°—13.6 г; 3) 146—214° (почти вся перегналась при 212—214°)—48.6 г; 4) 214—265° (заметной остановки термометра не было)—17.7 г; 5) остаток в колбе очень густой—27.2 г. Перегнавшееся с паром было экстрагировано эфиром. Из эфирного раствора 20%-ный едкий натр извлек о-крезол (после перегонки 52.5 г). В остатке после отгонки эфира получилось лишь очень немного нейтральных продуктов. Все фракции были подвергнуты обработке кляйзеновской смесью. Первые две фракции содержали очень немного нейтральных продуктов, фракция 3—довольно много, причем они частью закристаллизовались.

1-я фракция при охлаждении выделила много кристаллов. При обработке крепким едким натром она выделила много кристаллического фенолята. Выделенный из последнего продукт закристаллизовался при обыкновенной температуре. Он плавился в пределах 2—3° около 35°. Однако, он представлял смесь. На пористой пластинке вещество частью расплывалось и впитывалось в пластинку, оставляя кристаллы с температурой плавления 51°, оказавшиеся о-бензил-о-крезолом. Фенолы, выделенные из щелочного раствора, были жидки.

В виду невозможности разделения изомеров при помощи фенолятов фенолы были смешаны и к ним осторожно прибавлялся 5%-ный раствор едкого кали. При этом часть растворилась и выпали игольчатые кристаллы. Последние были отфильтрованы и отжаты на пористой пластинке. Эти кристаллы,—1.5 г,—оказались почти чистым о-бензил-о-крезолом. При кристаллизации из петролейного эфира они выделились в виде длинных пушистых иголочек, плавившихся при 51°.

Фенолы, перешедшие в раствор едкого кали, после выделения были смешаны с фракцией 2 и разогнаны в вакууме при 13 мм. Получены фракции: 1) 160—180°—3.1 г; 2) 160—182°—13.5 г.

Низшая фракция взята в эфир и обработана 6 см³ 20%-ного раствора едкого натра. Большая часть фенолов растворилась в щелочи. Из эфирного раствора остаток закристаллизовался при заражении кристалликом о-изомера. Фенолы же из щелочи жидки, и лишь при долгом стоянии выделили ничтожное количество пластиночек, после отсасывания промывания петролейным эфиром плавившихся при 121°.

2-я фракция при охлаждении закристаллизовалась. Отсосанные кристаллы (5.1 г) при быстрой кристаллизации из петролейного эфира выделялись в больших игольчатых кристаллах, а при медленной—в длинных пластинках, плавившихся при 50°, в смешанной пробе с о-изомером дававших сильную депрессию температуры плавления. Свойства их совпадают со свойствами п-бензил-о-крезола, описанными американскими авторами. Фенолы, отделенные от кристаллов п-изомера, были жидки, при сильном охлаждении они закристаллизовывались; но обработкой 5%-ным едким кали уже нельзя было выделить о-изомера: при приливании небольшого количества оставался нерастворенный жидкий слой, в большом же количестве щелочи все растворялось.

Таким образом, результаты моих опытов совпадают с данными американских исследователей, за исключением их указаний о нерастворимости о-изомера в большом количестве 5%-ного едкого кали. Что же касается п-изомера Мейера и Бернгауера, то, повидимому, это была смесь обоих изомеров.

Открыть присутствие в продукте о-окси-дибензила пока не удалось.

Бензилирование о-крезола пока представляет единственный случай конденсации с фосфорной кислотой, где п-изомер образуется в большем количестве, чем о-изомер. Однако, общий выход моно-бензил-крезолов незначителен. Главным же продуктом являются дибензилкрезолы, что также показывает легкость вхождения бензильной группы в пара-положение. Довольно много получается и фенолов, имеющих еще более высокую температуру кипения, строение которых остается загадочным.

β-нафтол и триметилкарбинол. В реакцию взято 36 г β-нафтола, 20 г триметилкарбинола и 120 г фосфорной кислоты уд. веса 1.86. Нагревание продолжалось 3½ часа при 75—80° и 2 часа при 90—95°. Продукт разбавлялся водой и взят в эфир. Эфирный раствор обработан 80 см³ 17%-ного едкого натра. Выпал твердый фенолят, который отфильтрован и промыт эфиром.

Из твердого фенолята был выделен кристаллический фенол в количестве 11.8 г. Из водно-щелочного фильтрата соляная кислота выделила также кристаллический фенол в количестве 24.3 г. Обе порции фенолов были перегнаны в вакууме. Фенол из кристаллического фенолята при 13 мм почти весь (9.8 г) перешел при 186—189°. Фенолы из щелочного раствора дали следующие фракции при 13 мм: 1) 163—167°—13.5 г; 2) 168—186°—3.9 г; 3) 187—196°—4.8 г. Фенол из кристаллического фенолята оказался почти чистым бутилнафтолом. В совершенно чистом виде он получается при однократной кристаллизации из горячего лигроина, из которого он выделяется в виде длинных шелковистых игол, переплетающихся в вату. Он плавится при 113°.

0.1654 г вещества: CO_2 — 0.5093 г; H_2O — 0.1218 г
$C_{14}H_{16}O$ Вычислено % C — 84.00, H — 8.00
Найдено % C — 83.81, H — 6.18

Если бутилнафтол растворить в спирте, в котором он весьма растворим, и разбавить раствор водой, то оседают игольчатые кристаллы гидрата, на воздухе медленно выветривающегося. Фракция 1 фенолов из щелочного раствора представляла β-нафтол, кристаллизующийся из лигроина в пластинчатых кристаллах. Из фракции 2 можно было выделить тот же бутилнафтол через кристаллический фенолят. Фракция 3 при кристаллизации из лигроина дала чистый бутилнафтол.

Резорцин и триметилкарбинол. В реакцию взято 40 г резорцина, 30 г триметилкарбинола и 150 г фосфорной кислоты уд. веса 1.87. Смешивание и приливание второй смеси к первой, как обычно. Нагревание—4 часа при 35—38° и 5 часов при 50°. Вязкий продукт реакции отделен от фосфорной кислоты и обработан водой и эфиром. Фосфорная кислота, разбавленная водой, также проэкстрагирована эфиром.

Эфирный раствор обработан 200 см³ 12%-ного раствора едкого натра в несколько приемов. После отгонки эфира осталось 22.4 г остатка, при охлаждении нацело закристаллизовавшегося (сырой дибутилрезорцин). Он был промыт петролейным эфиром, растворяющим окрашенные вещества и перекристаллизован из четыреххлористого углерода, из которого при охлаждении он выделяется в виде зернистых кристаллов.

При растворении в спирте и разбавлении раствора водой выпадают игольчатые кристаллы, представляющие кристаллизационное соединение с водой.

0.2410 г вещества: потеря в эксикаторе — 0.0336 г
$C_{14}H_{22}O_2\ 2H_2O$ Вычислено % H_2O — 13.96
Найдено % H_2O — 13.94

Чистый дибутилрезорцин представляет бесцветное вещество, плавящееся при 121°.

0.2016 г вещества: CO_2 — 0.5580 г; H_2O — 0.1815 г
$C_{14}H_{22}O_2$ Вычислено % C — 75.67, H — 9.91
Найдено % C — 75.49, H — 10.00

Щелочной раствор подкислен соляной кислотой, высолен поташом и несколько раз проэкстрагирован эфиром. Остаток после отгонки эфира из эфирного экстракта, высушенного сернонатриевой солью, при перегонке при 1.5 мм давления почти весь перегнался при 134—137° (31.6 г). После охлаждения продукт, представлявший очень густую массу, начал медленно кристаллизоваться. При приливании к нему небольшого количества воды он превратился в жидкость, при стоянии выделившую небольшое количество кристаллического порошка.

Отфильтрованный, промытый водой и высушенный отжатием на фильтровальной бумаге порошок (1 г) оказался гидратом дибутилрезорцина.

К фильтрату был прибавлен поташ, и он был проэкстрагирован эфиром. Перешедший в эфир продукт при перегонке при 1.5 мм давления весь перешел при 134—136° (29.3 г). При стоянии он медленно закристаллизовался и представлял довольно чистый бутилрезорцин.

Для того чтобы получить его в совершенно чистом состоянии, он был превращен в гидрат. При прибавлении к нему довольно значительного количества воды он быстро растворился в ней, а затем стал выделять кристаллический порошок гидрата, довольно трудно растворимый в воде. Он был отфильтрован, промыт небольшим количеством воды и высушен отжатием на фильтровальной бумаге.

0.5857 г вещества: потеря в эксикаторе — 0.0570 г
$C_{10}H_{14}O_2$ H_2O Вычислено % H_2O — 9.78
Найдено % H_2O — 9.66

Образовавшиеся при реакции бутилрезорцин и дибутилрезорцин могут иметь лишь строение I и II

I. OH, OH, $C(CH_3)_3$

II. OH, $(CH_3)_3C$, OH, $C(CH_3)_3$

м-крезол и каприлен. 28 г каприлена прибавлялись по каплям к смеси 27 г м-крезола и 100 г фосфорной кислоты уд. веса 1.85. Нагревание продолжалось 8 часов при 60—65°. Обработка велась, как обыкновенно.

Получено много нейтральных продуктов, 12.9 г непрореагировавшего крезола из раствора в едком натре и следующие фракции фенолов из щелочной кляйзеновской жидкости: 1) до 152°—0.9 г; 2) 152—154°—8.4 г при 11 мм и 3) небольшой остаток в колбе. Высококипящие продукты отсутствуют.

Фракция 2, представляющая довольно густую жидкость своеобразного запаха, имеет состав октилкрезола.

0.1996 г вещества: CO_2 — 0.5714 г; H_2O — 0.2669 г
$C_{15}H_{24}O$ Вычислено % C — 78.26, H — 14.78
Найдено % C — 78.08, H — 14.85

Фенол и аллиловый алкоголь. В реакцию были взяты: 1) смесь 45 г фенола со 100 г фосфорной кислоты уд. веса 1.84 и 2) приготовленная смешением при хорошем охлаждении ледяной водой смесь 28 г свежеперегнанного аллилового алкоголя и 100 г той же фосфорной кислоты. Приливание второй смеси к первой и перемешивание производилось при 50°, и вся операция продолжалась 8 часов. Продукт разбавлен водой и взят в эфир. Дальнейшая обработка велась, как обычно.

А. Получено из щелочного раствора около 10 г фенолов, кипевших в довольно широких пределах 180—212°, при обработке крепким раствором едкого натра выделивших кристаллический фенолят, который был отсосан, промыт небольшим количеством крепкого раствора едкого натра и высушен на пористой пластинке. Получилось его 8.3 г.

Б. Из кляйзеновской щелочной жидкости кислота выделила много густого растворимого в эфире и в едких щелочах продукта, не перегоняющегося без разложения в вакууме. При перегонке под обыкновенным давлением он деполимеризуется, оставляя в перегонной колбе густую неперегоняющуюся ниже 350° смолу. После трехкратной сухой перегонки получились фракции: 1) 195—212°—10.4 г; 2) 212—223°—8.9 г. Обе фракции при обработке крепким раствором едкого натра давали кристаллический фенолят. Выделенный из него фенол в свежеприготовленном виде кипел при 200—205°. При стоянии он медленно полимеризуется. Повидимому, это о-пропенилфенол, первоначальный же главный продукт реакции представляет его полимер.

Из петролейного эфира получено немного густого вещества, которое при перегонке под обыкновенным давлением деполимеризуется в вещество, переходящее при 209—210°, обладающее сильным запахом кумаранов. Температура кипения и свойства говорят за то, что это 2-метилкумаран. Результаты, подобные вышеописанным, получили Нидерль и Сторч при конденсации фенола с аллиловым алкоголем при действии серной кислоты в ледяной уксусной кислоте, с той разницей, что у них главным продуктом являлся полимер метилкумарана, а полимер пропенилфенола получался в небольшом количестве. Главным продуктом последний является при конденсации с серной кислотой на холоду. С фосфорной же кислотой при обыкновенной температуре, как показал наш особый опыт, реакция не происходит.

Фенол и пропиленгликоль. Взято в реакцию 29.5 г фенола, 26 г пропиленгликоля и 135 г фосфорной кислоты уд. веса 1.85. Ниже 100°, повидимому, реакция не происходит. После же нагревания при 100—105° в течение 3 часов образовался вязкий нерастворимый в фосфорной кислоте продукт. Этот продукт нацело растворялся в щелочи, при сухой перегонке вел себя, как вышеописанный полимер пропенилфенола.

Метиловый эфир м-крезола и третичный бутиловый алкоголь. К смеси 40 г метилового эфира мета-крезола и 70 г фосфорной кислоты уд. веса 1.87 приливалась по каплям смесь 27 г бутилового алкоголя и 70 г той же фосфорной кислоты. Приливание продолжалось $3^1/_2$ часа при 55°, перемешивание еще $4^1/_2$ часа при 75°.

По охлаждении верхний маслообразный слой отделялся, а нижний разбавлялся водой и экстрагировался эфиром, и эфирный раствор приливался к маслообразному продукту. Раствор сушился хлористым кальцием, и после отгонки эфира остаток перегонялся в вакууме при 12 мм. Получены фракции: 1) 60—91°—14.5 г (главным образом 62—65°); 2) 91—

101°—33 г (главным образом 98—101°); 3) 101—125°—5.2 г. Остатка почти нет.

Повторными перегонками получено 9 г фракции 60—63° при 12 мм (метиловый эфир мета-крезола), 38 г фракции 95—101° и немного промежуточной фракции и фракции 101—106°. Фракция 95—101° при охлаждении застыла и лишь отчасти плавилась при обыкновенной температуре. Она представляла почти чистый метиловый эфир бутилкрезола, тождественный по свойствам с эфиром, дающим при нитрации амбреттовый мускус, т. е., содержащий бутильную группу в орто-положении к метоксилу.

Метиловый эфир м-крезола и изобутиловый алкоголь. Взяты те же количества реагентов, что и в предыдущем опыте. Прибавление второй смеси к первой велось в течение $3\frac{1}{2}$ часов при 75°, дальнейшее перемешивание продолжалось 7 часов при 85—92°.

Получено при перегонке продукта при 10 мм: 1) 37—85°—21.2 г; 2) 85—110°—26.8 г; 3) остаток в колбе—2 г. Низшая фракция содержит изобутиловый алкоголь. Фракционировкой при обыкновенном давлении его было получено 4.8 г. Значительное его количество улетело при первой перегонке в вакууме. Кроме того при повторных фракционировках получено 18.1 г метилового эфира мета-крезола и 20.2 г фракции с температурой кипения 98—101° при 10 мм. Эта фракция при охлаждении льдом застывала не сполна. Отсосанные кристаллы представляли чистый метиловый эфир бутилкрезола, дающего при нитровании амбреттовый мускус.

Метиловый эфир м-крезола и третичный хлористый бутил. К смеси 30 г метилового эфира крезола и 100 г фосфорной кислоты уд. веса 1.86 приливались по каплям в течение 3 часов 34 г хлористого бутила, причем реакционная смесь нагревалась до 45—50°. Нагревание продолжалось еще 6 часов при 55—60°. Реакционная колба была снабжена обратным холодильником. При реакции было заметно выделение хлористого водорода.

Продукт был взят в эфир, промыт содой и высушен хлористым кальцием. Получены при 10 мм давления фракции: 1) 60—91°—10.4 г; 2) 91—102°—25.5 г. В колбе остался лишь ничтожный остаток.

Фракция 2 при охлаждении застывает. При обыкновенной температуре отчасти плавится. При вторичной перегонке фракции 1 получено при 10 мм: 1) 60—65°—7.9 г; 2) 90—101°—2 г.

Таким образом, и в этом случае главным продуктом является эфир, содержащий бутильную группу в орто-положении к метоксилу.

Диметиловый эфир резорцина и триметилкарбинол. К смеси 42 г диметилового эфира резорцина и 70 г фосфорной кислоты уд. веса 1.87 приливалась смесь 27 г бутилового спирта и 75 г фосфорной кислоты в течение 4 часов. Перемешивание продолжалось еще 4 часа. Температура все время поддерживалась в 50°. Продукт реакции разбавлен водой, взят в эфир. После сушения и отгонки эфира—перегнан при 13 мм.

После двухкратной фракционировки получены следующие фракции: 1) 96—105° (диметиловый эфир резорцина)—6.2 г; 2) 106—125°—6.9 г; 3) 126—129°—25.3 г; 4) 130—146°—16.1 г.

Фракция 3 имеет состав диметилового эфира монобутилрезорцина.

0.1438 г вещества: CO_2 — 0.3908 г; H_2O — 0.1210 г

$C_{12}H_{18}O_2$ Вычислено % C — 74.23, H — 9.27

Найдено % C — 74.12, H — 9.35

Диметиловый эфир третичнобутилрезорцина, для которого возможно лишь строение :

OCH_3
OCH_3
$C(CH_3)_3$

представляет жидкость пряного запаха, нерастворимую в воде, легко растворимую в спирте, эфире и бензоле. При сильном охлаждении она застывает в кристаллическую массу, плавящуюся при 4°.

Фракция 4 при обыкновенной температуре почти вся закристаллизовалась. Она может быть очищена перекристаллизацией из спирта, в котором на холоду она умеренно растворима. При быстром охлаждении горячих спиртовых растворов вещество выделяется в зернистых кристаллах. Медленным же испарением спиртовых растворов оно может быть получено в виде больших прозрачных кристаллов. Вещество плавится при 76°. Запах диметилового эфира дибутилрезорцина похож на запах монобутильного производного, но гораздо слабее его.

0.1218 г вещества: CO_2 — 0.3433 г; H_2O — 0.1154 г
$C_{16}H_{26}O_2$ Вычислено % C — 76.80, H — 10.40
Найдено % C — 76.87, H — 10.53

Диметиловый эфир дибутилрезорцина может иметь лишь строение

CCH_3
$(CH_3)_3C$ OCH_3
$C(CH_3)_3$

Выражаю свою глубокую благодарность проф. Delépine за предоставление возможности работать в лаборатории химии Collège de France, где и были произведены эти работы.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ZUR FRAGE ÜBER DEN MECHANISMUS DER REAKTION DES PYRIDINS UND SEINER DERIVATE MIT DEN ALKALIMETALLAMIDEN

M. KABATSCHNIK

(*Présenté par* **A. Favorskij**, *Membre de l'Académie*)

Die von A. Tschitschibabin und O. Seide (1) entdeckte Amidierungsreaktion der Pyridinbasen unter Einwirkung der Alkalimetallamide wurde von diesen Verfassern durch folgende Gleichung ausgedrückt:

(I)
$$C_5H_5N + NH_2Na \rightarrow C_5H_4N\text{—}NHNa + H_2$$
$$C_5H_4N\text{—}NHNa + H_2O \rightarrow C_5H_4N\text{—}NH_2 + NaOH.$$

Wie bekannt tritt die Amingruppe in α-Stellung zum Ringstikstoffatom des Stickstoffs; es ist gelungen, die Bildung von γ-Aminoderivaten (für das Pyridin selbst, für das Chinolin und das $\alpha\alpha'$-Lutidin)(2) in minimalen Mengen nachzuweisen; dagegen konnte man die Bildung von β-Aminoderivaten in keinem einzigen Falle beobachten.

K. Ziegler und H. Zeiser (3) haben die Wirkung der Organolithiumverbindungen auf Pyridin untersucht und dabei eine Analogie zwischen der Alkylierung des Pyridins durch Einwirkung der Li-Alkyle einerseits und der Amidierungsreaktion des Pyridins durch Natriumamid andererseits durchgeführt.

Ihrer Ansicht nach stellt sich die Wechselwirkung von Natriumamid mit Pyridin folgendermassen dar:

(II)
$$C_5H_5N + NH_2Na \rightarrow C_5H_5N(Na)\text{<}^{H}_{NH_2} \xrightarrow{\text{erw.}} C_5H_4N\,NH_2 + NaH$$
$$C_5H_4N\,NH_2 + NaH \rightarrow C_5H_4N\text{—}NHNa + H_2.$$

Das Molekül des Na-Amids addiert sich an die N=C- Doppelbindung des Pyridins. Darauf erfolgt die Abspaltung des Moleküls NaH unter Bildung von α-Aminopyridin.

Die Abspaltung des Hydrids eines Alkalimetalles wurde von den erwähnten Forschern z. B. bei Einwirkung von LiC_6H_5 auf Pyridin beobachtet. Dabei wird LiH als Niederschlag gefällt. Das sich im Falle des Natriumamids bildende Hydrid ist unfassbar, weil es sofort durch das Aminopyridin zersetzt wird und dabei Na-Derivate von Aminopyridin und Wasserstoff bildet.

Zur Bestätigung dieser Auffassung berufen sich die Autoren auf die Angabe von Sachs (4), dass bei Amidierung von Naphtalin mit Natriumamid der Wasserstoff nicht nur im Verlauf der Erhitzung des Naphtalins mit Phenol und Natriumamid ausscheidet, sondern hauptsächlich bei Zersetzung des Reaktionprodukles mit Wasser, was für die Bildung von Natriumhydrid spricht.

Alle diese Überlegungen machen die Hypothese von K. Ziegler und H. Zeiser sehr überzeugend: es unterliegt keinem Zweifel, dass bei der Bildung der Aminopyridine in erster Linie Addition des Natriumamids gemäss ihrem Schema erfolgt.

Die Bildung von Aminopyridinen ist jedoch beiweitem nicht die einzige Richtung der Reaktion der Pyridinbasen mit Natriumamid. In allen Fällen erfolgen ausser der Reaktion der Amidierung, zuweilen sogar vorwiegend, Reaktionen der Polymerisation und Kondensation mit Bildung hochsiedender Produkte, deren Moleküle zwei Pyridinkerne enthalten, die entweder unmittelbar durch die C—C-Bindung oder durch das Stickstoffatom verbunden sind. So entstehen bei Amidierung von Pyridin, ausser α-Aminopyridin und einer unbedeutenden Menge von γ-Aminopyridin und αα′-Diaminopyridin, auch Dipyridyl-αα′-Amin, Dipyridyle und eine Reihe von noch unerforschten Produkten (5); bei der Amidierung von Chinolin entstehen neben α-Aminochinolin hauptsächlich αβ-Dichinolil und Dichinolin (6); 2,5-Dimethylpyrazin ergibt bei Einwirkung von Na-Amid hauptsächlich Tetramethyl-Dipyrazyl und Trimethyl-Dipyrazyl-Methan (7) u. s. w.

Wenn die Bildung von Diaminopyridinen und Dipyridylaminen sich durchaus in das Schema K. Zieglers und H. Zeisers einordnen lässt:—das Natriumderivat des Aminopyridins reagiert entweder mit dem zweiten Molekül des Natriumamids, oder mit dem Pyridin-Molekül, wobei sich das Additionsprodukt NaH abspaltet u. s. w., so verlangt demgegenüber die Bildung der Polymerisations- und Kondensationsprodukte auf Kosten der Entstehung der C—C-Bindung eine besondere Erklärung.

Zur Aufstellung einer solchen Erklärung müssen folgende Tatsachen in Betracht gezogen werden:

1. In allen Fällen, wo sich bei der Amidierungsreaktion eine grosse Menge höherer Produkte bildet, kann man neben Wasserstoff eine reichliche, zuweilen sogar überwiegende Ausscheidung von Ammoniak beobachten. Diese Tatsache wird in der Literatur nirgends hervorgehoben, doch wurde sie vom Autor selbst und von anderen Mitarbeitern unseres Laboratoriums beobachtet.

2. Die Pyridinbasen, die Methyl- oder andere Gruppen in der α-und α′-Stellung zum Ringstickstoffatom enthalten und daher nicht befähigt sind sich in der α-Stellung zu amidieren, aber immerhin «bewegliche» Wasserstoffatome enthalten, gehen doch eine Reaktion mit Natriumamid ein; in diesen Fällen die hochsiedende Substanzen bilden die Hauptprodukte der Reaktion. Dieses ist für αα-Lutidin (8) und Chinaldin (9) nachgewiesen.

3. Bei Einwirkung von Natriumamid auf Chinolin bildet αβ-Dichinolil das Hauptprodukt der Reaktion und dazu ein Dichinolin von noch unbekannter Struktur, das sich schon vom Sauerstoff der Luft leicht zu αβ-Dichinolil oxydieren lässt; dabei wird α-Aminochinolin in sehr unbedeutenden Mengen gebildet (6).

4. Das 2,5-Dimethylpyrazin amidiert sich bei Einwirkung von Natriumamid in Xylol blos in geringer Ausbeute. Ohne Lösungsmittel bilden Tetramethyl-Dipyrazyl und Trimethyl-Dipyrazyl-Methan das Hauptprodukt der Reaktion.

N N N N
CH_3 CH_3 CH_3 CH_3
CH_3 CH_3 und CH_3 CH_2— CH_3;
N N N N

Offenbar bilden sich hier wie auch im Falle des Chinolins zuvor Dihydroderivate, die sich darauf leicht oxydieren (7).

5. In allen untersuchten Fällen, wo bei der Amidierungsreaktion die Vereinigung zweier Pyridinkerne durch die C—C-Bindung erfolgt, verbindet sich wenigstens ein Pyridinkern auf Kosten seines α-(seltener γ-) Kohlenstoffatoms.

6. Die metallorganischen Verbindungen reagieren (meistens beim Erhitzen) mit Pyridin und seinen Derivaten. Das Produkt der Reaktion nach Zersetzung mit Wasser bildet α-Alkyl oder α-Arylpyridin (Dehydrierung). Wie auch bei Amidierung der Pyridinbasen kann die Reaktion nur in sehr seltenen Fällen, wenn beide α-Stellungen besetzt sind, in die γ-Stellung einlenken. Diese Reaktion findet statt sowohl für Li-organische Verbindungen als auch für Haloid-Magnesium-Alkyle (3, 10) und für α-Phenyl-Isopropyl-Kalium (11). Erschwert ist sie allem Anschein nach nur für die Triphenylmethyl- und Diphenylmethylderivate[1].

7. Ebenso reagiert mit Pyridin das Phenyl-Natriumamid (es bildet sich α-Anilinopyridin (12) und das α-Aminopyridyl-Natrium (5) (es bildet sich das Di-αα'-Pyridylamin).

8. Das α-Pikolin bildet mit Li-organischen Verbindungen das α-Picolyl-Lithium, für welches folgende Srtuktur als die wahrscheinlichste gelten darf:

—CH_2Li, aber nicht: =CH_2
N N
|
Li

da bei Einwirkung von Haloidalkylen, von Benzoylchlorid, Benzaldehyd und besonders von Benzophenon entsprechende C-Derivate entstehen.

Ausserdem ergibt das αα'-Lutidin bei Einwirkung zweier Moleküle von Lithiumphenyl ein Dilithiumderivat (13), was bei einer Pyridon-Methidstruktur unmöglich wäre. Es ist merkwürdig, dass im gegebenen Falle, d. h. bei Vorhandensein «beweglicher» Wasserstoffatome der Methylgruppe,

[1] So verbindet sich Diphenylmethyl-Natrium nur mit Akridin und mit einigen offenen Azomethinen, wie Benzalanilin, nicht aber mit Pyridin, Chinolin, Isochinolin und Benzophenonanyl (10). Übrigens kann diese Frage noch nicht als geklärt gelten.

die Bildung von α-Pikolyllithium (bezw. von αα'-Lutidylderivat) vorzugsweise erfolgt vor einem Anschluss von Li-Phenyl an die doppelte N=C-Bindung mit nachfolgender Bildung eines α-Phenylderivats, wie das in den Synthesen von R. Ziegler und H. Zeiser u. a. stattfindet.

Die vergleichende Zusammenstellung dieser experimentellen Tatsachen führt unabwendbar zu folgendem Bilde der Wechselwirkung der Pyridinbasen mit Natriumamid, das dem Wesen nach eine Erweiterung des Schemas von R. Ziegler und H. Zeiser darstellt.

Bei Einwirkung des Natriumamids auf Pyridin- oder ähnliche Basen geht eine Addierung des Metallamids an die N=C-Doppelbindung vor sich mit nachfolgender Bildung einer α-Aminoverbindung (Schema II)[1]. Gleichzeitig damit, und in einer Reihe von Fällen vorwiegend, erfolgt die Ersetzung eines der Wasserstoffatome durch ein Atom des Alkalimetalles mit Ausscheidung von Ammoniak[2]. Die entstandene Natrium- bezw. Kaliumverbindung reagiert mit dem zweiten Molekül der Base in einer für die metallorganischen Verbindungen üblichen Weise, und zwar indem sie sich an die N=C-Doppelbindung mit der Bildung von Dihydro-Dipyridylen und von Produkten ihrer Oxydation—Dipyridylen oder (bei Vorhandensein der α-CH_3-Gruppe) Dihydro-Dipyridylmethanen und Dipyridylmethanen addiert.

Je nach der Natur der am Ausgang stehenden Pyridin- oder sonst ähnlichen Base und je nach den Reaktionsbedingungen (Temperatur, Konzentration) kann entweder die Anschluss-Reaktion von $NaNH_2$ zur N=C-Bindung überwiegen, oder die Bildung einer metallorganischen Verbindung mit ihrem nachfolgenden Anschluss an die N=C-Bindung. Das Pyridin selbst und seine einfachsten Homologen (α-, β-, und γ-Pikoline) amidieren sich unter 60%-iger und höherer Ausbeute an Aminoderivaten (14) und verhältnismässig unbedeutender Bildung von Dipyridylen u. a.

Kompliziertere Bildungen, wie αα'-Lutidin, Chinolin, 2,5-Dimethylpyrazin, Chinaldin bilden im Gegenteil mit Natriumamid unter Ausscheidung von Ammoniak natriumorganische Verbindungen, die bei ihrer relativ hohen Entstehungstemperatur leicht mit dem zweiten Molekül der Base im obenerwähnten Sinne reagieren.

So z. B. reagiert das 2,5-Dimethylpyrazin sowohl gemäss dem Schema II mit Bildung von α-Aminodimethylpyrazin, als auch nach Schema III und IV mit Bildung von Trimethyl-Dipyrazyl-Methan und Tetramethyl-Dipyrazyl (über Dihydroderivate):

(III)

$$\text{Dimethylpyrazin } (CH_3, CH_3) + NaNH_2 \rightarrow \text{Pyrazin } (CH_3, CH_2Na) + NH_3$$

$$\text{Pyrazin } (CH_3, CH_2Na) + \text{Pyrazin } (CH_3, CH_3) \rightarrow \text{Pyrazin } (CH_3)\text{—}CH_2\text{—Dihydropyrazin } (CH_3, CH_3, H, N\text{—}Na) \rightarrow$$

[1] Das entsprechende Produkt ist z. B. für die Reaktion von Isochinolin mit $NaNH_2$ im Flüssigen Ammoniak nachgewiesen worden (F. W. Bergstrom, A., **515**, 34 (1934).

[2] Vrgl. F. W. Bergstrom, Am. Soc., **53**, 4065 (1931).

$\xrightarrow[\text{dehydr.}]{H_2O}$

Oder im Falle einer Ersetzung im Kern:

(IV) $+ NH_2Na \rightarrow \quad + NH_3$

$\rightarrow$

$\xrightarrow[\text{dehydr.}]{H_2O}$

Die Bildung von αβ-Dichinolyl und die Struktur von Dichinolin wird unserem Schema gemäss folgendermassen veranschaulicht:

(V) $+ NaNH_2 \rightarrow \quad + NH_3$

$\xrightarrow{H_2O}$

$\xrightarrow{\text{Oxyd.}}$

Dichinolin αβ-Dichinolyl

Bis heute bleiben die höheren Produkte, die sich bei Einwirkung von Na-Amid auf Chinaldin und Lutidin bilden, unerforscht, ebenso wie die Amidierungsreaktion des Lepidins. Von dem dargelegten Standpunkt aus

ist auch in diesen Fällen die Bildung von Homologen des Dipyridyl- und Dichinolylmethans oder von Dipyridylen und Dichinolylen (am wahrscheinlichsten $\alpha\beta$) zu erwarten.

Ich ergreife die Gelegenheit, um auch an dieser Stelle D-r M. M. Katznelson meinen Dank für seine Ratschläge auszusprechen.

Laboratorium für Erforschung und Synthese
pflanzlicher und tierischer Stoffe.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

LITERATUR

1. Чичибабин А. Е. и Зейде О. А., Ж., **46**, 1216 (1914); C., 1915, I, 1064.— Чичибабин А. Исследования из области пиридиновых оснований, Москва, 1918.
2. Чичибабин А. Е., l. c., 31 и 154; Ж., **47**, 835 (1915).
3. Ziegler K. u. Zeiser H., B., **63**, 1847 (1930); A., **485**, 174 (1931).
4. Sachs F., B., **39**, 3006 (1906).
5 Чичибабин А., l. c.—Wibaut I. P. u. Dingemanse, Rec., **42**, 240 (1923), C., **1923**, III, 1364.
6. Чичибабин А. Е. и Зацепина—Чичибабин, l. c., стр. 152.
7. Чичибабин А. Е. и Щукина М. Н., Ж., **62**, 1189 (1930).
8. Чичибабин А. Е., l. c., стр. 31; Ж., **47**, 835 (1915).
9. Чичибабин А. Е., l. c., стр. 6.
10. Bergmann, Blum-Bergmann u. Christiani, A., **483**, 80 (1930).— Bergstrom F. W. and McAllister S. H., J. Am. Soc., **52**, 2845; C., **1930**, II, 2653.—Bergmann E. u. Rosenthal W., J. pr. Ch., **135**, 267, (1932).
11. Ziegler K. u. Wollschitt H., A., **479**, 125 (1930).
12. Чичибабин А. Е. и Зейде О. А., l. c.—Чичибабин А., l. c., стр. 21.
13. Bergmann E. u. Rosenthal W., J. pr. Ch., **135**, 267 (1932).
14 Зейде О. А., Ж., **50**, 534 (1918); C., **1923**, III, 1022.—Seide O. A., B., **57**, 791, 1802 (1924).

М. И. КАБАЧНИК. К ВОПРОСУ О МЕХАНИЗМЕ РЕАКЦИИ ПИРИДИНА И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ С АМИДАМИ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ.

РЕЗЮМЕ

Открытая А. Е. Чичибабиным и О. А. Зейде(1) реакция амидирования пиридиновых оснований действием амидов щелочных металлов изображалась авторами уравнениями (I)[1].

K. Ziegler и H. Zeiser (3), изучая действие металл-органических соединений лития на пиридин, провели аналогию между реакцией алкилирования пиридина действием Li-алкилов и реакцией амидирования пиридина натрий-амидом. С их точки зрения, механизм взаимодействия натрий-амида с пиридином изображается уравнением (II).

Однако, образование амино-пиридинов отнюдь не является единственным направлением реакции пиридиновых оснований с натрий-амидом. Во всех случаях, кроме основной реакции амидирования, а иногда и предпочтительно, протекают реакции полимеризации или конденсации с образованием высоко-кипящих продуктов, молекулы которых содержат два пиридиновых ядра, соединенных либо непосредственно C—C-связью либо через атом азота.

Если образование диаминопиридинов и дипиридил-аминов вполне укладывается в схему K. Ziegler'a и H. Zeiser'a, то образование продуктов

[1] См. немецкий текст статьи.

полимеризации и конденсации за счет возникновения С—С-связи требует специального объяснения.

Для построения подобного объяснения необходимо принять во внимание следующие факты:

1. Во всех случаях, когда при реакции амидирования образуется большое количество высших продуктов, наблюдается обильное выделение аммиака наряду с водородом, а иногда и предпочтительно.

2. Пиридиновые основания, содержащие метильные или иные группы в α- и α'-положениях к кольцевому атому азота, не способные поэтому амидироваться в α-положение, но обладающие «подвижными» атомами водорода, все же вступают в реакцию с натрий-амидом; главными продуктами реакции в этих случаях являются высоко-кипящие продукты. Так это установлено для αα-лутидина (8) и хинальдина (9).

3. При действии натрий-амида на хинолин главным продуктом реакции является αβ-дихинолил, и неизвестного пока строения дихинолин, легко окисляющийся уже кислородом воздуха в αβ-дихинолил; α-аминохинолин образуется при этом в очень небольшом количестве (6).

4. 2,5-диметил-пиразин при действии натрий-амида амидируется в ксилоле лишь с небольшим выходом. Без растворителя, главным продуктом реакции является тетраметил-дипиразил и триметил-дипиразил-метан. Повидимому, как и в случае хинолина, здесь раньше образуются дигидропроизводные, легко затем окисляющиеся (7).

5. Во всех изученных случаях, когда при реакции амидирования происходит соединение двух ядер пиридина С—С-связью, по крайней мере одно пиридиновое ядро присоединяется за счет своего α-углеродного атома (и реже γ-).

6. Металл-органические соединения реагируют (чаще при нагревании) с пиридинами, присоединяясь по αβ-связи. Продукт реакции после разложения водой образует α- (или γ-) алкил или α-(или γ-) арил-пиридины (дегидрирование).

7. Точно так же реагируют с пиридином фенил-натрий-амид [образуется α-анилино-пиридин (12)] и α-амино-пиридил-натрий (5) (образуется ди-αα'-пиридиламин).

8. α-пиколин с Li-органическими соединениями образует α-пиколил-литий (3), для которого можно считать более вероятной структуру

$$\text{(пиридин)}-CH_2Li, \quad \text{но не} \quad \text{(N-Li-дигидропиридин)}{=}CH_2$$

Сопоставление этих экспериментальных фактов с неизбежностью приводит к нижеследующей картине взаимодействия пиридиновых оснований с натрий-амидом, представляющей по существу расширение схемы K. Ziegler'a и H. Zeiser'a.

При действии натрий-амида на пиридиновое или аналогичное основание происходит присоединение амида металла к двойной N=C-связи с последующим образованием α-амино-соединения (схема II)[1]. Одновременно с этим, а в ряде случаев предпочтительно, происходит замещение

[1] Продукт присоединения констатирован, напр., для реакции изохинолина с $NaNH_2$ в жидком аммиаке [F. W. Bergstrom, A., **515**, 34 (1934)].

одного из водородных атомов основания на атом щелочного металла с выделением аммиака. Образовавшееся натрий- (соответственно—калий-) органическое соединение реагирует со второй молекулой основания обычным для металл-органических соединений образом, присоединяясь по двойной N=C-связи с образованием дигидро-дипиридилов и продуктов их окисления—дипиридилов или же (при наличии α-CH_3-группы) дигидродипиридил-метанов и дипиридил-метанов.

В зависимости от природы исходного пиридинового или аналогичного основания, а также от условий реакции (температура, концентрация) может преобладать либо реакция присоединения $NaNH_2$ к N=C-связи, либо образование металлоорганического соединения и последующее присоединение его к N=C-связи. Сам пиридин и его простейшие гомологи (α-, β- и γ-пиколины) амидируются с шестидесятипроцентным и выше выходом амино-производных (14) и сравнительно небольшим образованием дипиридилов и пр.

Более сложные основания, как αα'-лутидин, хинолин, 2,5-диметилпиразин, хинальдин, напротив, предпочтительно образуют с натрийамидом с выделением аммиака натрий-органические соединения, легко реагирующие при сравнительно высокой температуре их образования со второй молекулой основания в указанном выше смысле.

Так например, 2,5-диметил-пиразин реагирует как по схеме (II) с образованием α-амино-диметилпиразина, так и по схеме (III) и (IV) с образованием триметил-дипиразил-метана и тетраметил-дипиразила (через дигидропроизводные).

Образование αβ-дихинолила и строение дихинолина объяснится схемой (V).

До сих пор совершенно не изучены высшие продукты, образующиеся при действии Na-амида на хинальдин и лутидин, а также реакция амидирования лепидина. С изложенной точки зрения в этих случаях также следует ожидать образования гомологов дипиридил- и дихинолил-метана или дипиридилов и дихинолилов (вероятнее всего αβ).

Пользуюсь случаем принести благодарность д-ру М. М. Кацнельсону за некоторые советы.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О МНИМОМ ДИГИДРОФЕНИЛБЕНЗАМИДИНЕ

А. В. КИРСАНОВА и Я. Н. ИВАЩЕНКО

Действием натрийамида на бензальанилин нами (1) был получен фенилбензамидин и бензиланилин. Образование бензиланилина безусловно объясняется восстановлением еще не вступившего в реакцию бензальанилина, за счет водорода, выделяющегося при амидировании. Восстановление фенилбензамидина весьма мало вероятно, так как последний в реакционной массе находится в виде твердой натровой соли и поэтому только с трудом может вступить в дальнейшие реакции. Однако ошибочные литературные данные (2) заставили нас первое время предполагать, что в наших руках имеется не фенилбензамидин, а его продукт восстановления—дигидрофенилбензамидин, полученный Бернтсеном (2) восстановлением фенилбензамидина амальгамой натрия. Сравнение с препаратом, полученным по старому способу, смешанная проба и аналитические данные вполне строго доказали, что наш препарат является фенилбензамидином, а не продуктом его восстановления. Вообще, с нашей точки зрения, дигидрофенилбензамидин, который правильнее назвать фенил-N-фенилдиаминометаном или N-фенил-α,α-диаминотолуолом, в свободном состоянии не должен существовать, или во всяком случае должен быть очень непрочен и легко разлагаться с отщеплением аммиака или анилина и образованием бензальанилина или гидробензамида.

$$C_6H_5 \cdot CH\left<\begin{matrix} NHC_6H_5 \\ NH_2 \end{matrix}\right. \rightarrow NH_3 + C_6H_5 \cdot CH : N \cdot C_6H_5$$

$$C_6n_5 \cdot CH\left<\begin{matrix} NHC_6H_5 \\ NH_2 \end{matrix}\right. \rightarrow C_6H_5NH_2 + C_6H_5CH : NH \rightarrow \text{гидробензамид}$$

Диаминометан, $CH_2(NH_2)_2$, известен только в водном растворе (3) и распадается при попытке выделить его в чистом состоянии. Несколько прочнее производные диаминометана и его гомологов, у которых при каждом атоме азота стоит по ацилу (4) или по арилу (5). Однако и эти вещества очень легко расщепляются. Так, N_1N_1-дифенилдиаминометан уже при растворении в спирте теряет молекулу анилина (6) и переходит в ангидроформальдегиданилин. Гомологи дифенилдиаминометана также легко отщепляют молекулу анилина, а при кипячении с разбавленными кислотами омыляются до альдегидов (7). Не более прочны производные диаминометана и его гомологов, полностью алкилированные при обоих атомах азота (8). Напр., N_1 N_1-тетраэтилдиаминометан разбавленными ки-

слотами тотчас же расщепляется на диэтиламин и триоксиметилен (9). Другие тетраалкилдиаминометаны расщепляются кислотами также легко.

Таким образом диаминометан, его гомологи и производные расщепляются по одной из схем (R-алкил, арил или водород).

$$R \cdot CH\langle{}^{NHR}_{NHR} \rightarrow R \cdot CH:NR + R \cdot NH_2 \qquad (1)$$

$$R \cdot CH\langle{}^{NR_2}_{NR_2} \xrightarrow[+H_2O]{} R \cdot CHO + 2NHR_2 \qquad (2)$$

Повидимому расщепление по первой схеме идет только в том случае если при атоме азота есть хотя бы один атом водорода. Указаний на то, чтобы тетраалкилдиаминометаны распадались по первой схеме в литературе нет.

Вступление к азоту негативных заместителей заметно увеличивает прочность диаминометанов по отношению к расщеплению по второй схеме.

Бернтсен (2) получил дигидрофенилбензамидин восстановлением фенилбензамидина 3%-ной амальгамой натрия в спиртовом растворе, нейтрализуя выделяющуюся щелочь уксусной кислотой. Далее он пишет, что при «соответствующей» обработке смеси удается выделить две солянокислых соли, из которых одна сравнительно легко очищается и представляет собою хлоргидрат дигидрофенилбензамидина, плавящийся при 223—224.5°. Анализ Бернтсен не приводит, хотя и говорит, что аналитические данные соответствуют формуле $C_{13}H_{14}N_2HCl$. Следует отметить, что хлоргидрит исходного фенилбензамидина плавится при 224° (10). Свободный «бензилиденмонофенилдиамин», по Бернтсену,—мелкие кристаллы из разбавленного спирта, плавящиеся при 114.5—115°, нерастворимые в воде, очень легко растворимые в обычных растворителях, перегоняются без разложения. Эти свойства, за исключением температуры плавления, отвечают свойствам исходного фенилбензамидина. Во время работы Бернтсена температура плавления фенилбензамидина принималась за 111—112° (11). Как нами указывалось (1) в прошлой работе, это объясняется тем, что фенилбензамидин перекристаллизовывался из разбавленного спирта, а таким образом очень трудно получить вполне чистый препарат. После перекристаллизации из петролейного эфира фенилбензамидин плавится при 114—115°, т. е. точно так, как дигидрофенилбензамидин Бернтсена! По определению азота (цифры не приводятся) Бернтсен придает основанию формулу $C_{13}H_{14}N_2$, но разница в содержании азота для веществ $C_{13}H_{14}N_2$ и $C_{13}H_{12}N_2$ настолько не велика (14.29 и 14.15%), что делать какие-либо заключения по определению азота в данном случае по меньшей мере неосторожно.

Ни одной смешанной пробы Бернтсеном сделано не было; указано только, что хлоргидрат и хлороплатинат значительно отличаются от соответствующих солей исходного фенилбензамидина. Однако, чем они «значительно отличаются», не указано. Таким образом и теоретические соображения и критический разбор работы делает очень мало вероятным существование дигидрофенилбензамидина Бернтсена, в руках которого повидимому был только не вошедший в реакцию, но зато очищенный через солянокислую соль, фенилбензамидин. Кроме того Бернтсен дает кристаллографические константы солянокислого дигидрофенилбензамидина, но,

к сожалению, мы не имели возможности провести соответствующие измерения для солянокислого фенилбензамидина.

Чтобы решить вопрос окончательно, мы провели восстановление фенилбензамидина амальгамой натрия в различных условиях, самым тщательным образом исследуя все продукты реакции и добиваясь почти полного схождения баланса между взятым в реакцию и полученными веществами.

Ни разу нам не удалось получить основания, плавящегося около 115°, которое не было бы исходным фенилбензамидином. В полном соответствии с теоретическими соображениями нам удалось выделить: бензальдегид, анилин, бензиланилин и бензиламин, образующиеся по уравнениям:

$$C_6H_5\cdot C\begin{cases}NHC_6H_5\\ NH\end{cases} \xrightarrow[+2H]{} \left[C_6H_5\cdot CH\begin{cases}NH\cdot C_6H_5\\ NH_6\end{cases}\right] \rightarrow C_6H_5\cdot CH:N\cdot C_6H_5 + NH_3$$

$$C_6H_5CH:N\cdot C_6H_5 \xrightarrow[+H_2O]{} C_6H_5\cdot CHO + C_6H_5\cdot NH_2$$

$$C_6H_5\cdot CH:N\cdot C_6H_5 \xrightarrow[+2H]{} C_6H_5\cdot CH_2\cdot NH\cdot C_6H_5$$

$$\left[C_6H_5\cdot CH\begin{cases}NH\cdot C_6H_5\\ NH_2\end{cases}\right] \rightarrow C_6H_5\cdot NH_2 + C_6n_5\cdot CH:NH \xrightarrow[+2H]{} C_6H_5\cdot CH_2NH_2$$

Обычно общий вес всех продуктов реакции и не вошедшего в реакцию фенилбензамидина составлял 90—95% веса, взятого в реакцию фенилбензамидина.

Все продукты реакции были идентифицированы превращением в характерные производные, сравнением с веществами, синтезированными обычными способами и смешанными пробами. Описывается один из наиболее характерных опытов.

К раствору 25 г (0.127 М) фенилбензамидина (*П* : 114—115°) в 250 см³ спирта прибавлено 194.7 г 3%-ной амальгамы натрия (0.254 атома Na). По мере растворения натрия к смеси постепенно было прибавлено 15.25 г ледяной уксусной кислоты (0.254 М). Во время реакции выделения газа не происходит. Под конец жидкость слабо пахнет аммиаком. Когда выпало много уксуснокислого натрия прибавлено еще 100 см³ спирта. Через пять часов ртуть была удалена, и раствор вместе с осадком был упарен досуха в вакууме при 50°. Сухой остаток был растворен в 400 см³ воды, раствор подкислен соляной кислотой на конго, полученная мутная жидкость отфильтрована от небольшого количества зеленоватой смолы (0.5 г) и два раза извлечена по 100 см³ эфира. Эфирная вытяжка промыта раствором кислого углекислого натрия, высушена и эфир отогнан. Остаток—масло с запахом бензальдегида—перегнан в вакууме:

I фракция 60—80°/2 мм — 0.9 г
II фракция 155—165°/2 мм — 1.0 г, в колбе небольшой остаток

I фракция представляет собою бензальдегид—с фенилгидразином—бензальдегидфенилгидразон, иглы, *П* : 155—156°. смешанная проба *П* : 155—156°.

II фракция закристаллизовалась—бензиланилин—с уксусным ангидридом—ацетилбензиланилин, из петролейного эфира, листочки, *П* : 56—57°, смешанная проба *П* : 56—57°.

Кислый водный раствор оснований нейтрализован аммиаком до появления мути и затем осажден в пять приемов 216 см³ 2%-ного водного аммиака (0.254 М).

После прибавления каждых 43 см³ аммиака выпавший бесцветный кристаллический осадок отсасывался и промывался водой. Три первые порции выпавшего продукта оказались чистым фенилбензамидином с *П*: 114—115°, смешанная проба *П*: 114—115°. Всего получено 17.8 г чистого фенилбензамидина. При дальнейшем прибавлении аммиака (4 и 5 порции) осадок не выпадал, но образовалась некристаллизующаяся молочная эмульсия. Жидкость была несколько раз извлечена эфиром, эфир был отогнан, и остаток (3 г) оставлен на несколько суток. При этом выкристаллизовался фенилбензамидин, который был отсосан и промыт небольшим количеством эфира. Получено 0.8 г продукта, плавящегося при 112—115°, смешанная проба 112—115°. Маслянистый фильтрат с запахом анилина был разогнан в вакууме

I фракция до 70°/3 мм — 1.0 г
II фракция 160—165°/3 мм — 0.8 г, в колбе небольшой остаток

I фракция—анилин с уксусным агидридом—ацетанилид из воды *П*: 114—115°, смешанная проба *П*: 114—115°.

II фракция закристаллизовалась — бензиланилин — с уксусным ангидридом — ацетилбензиланилин из петролейного эфира, листочки, *П*: 56 — 57°, смешанная проба *П*: 56—57°. После извлечения эфиром к водному раствору прибавлено 60 г твердого едкого натра, и по растворении жидкость пять раз извлечена по 50 см³ эфира. Эфирные вытяжки высушены едким кали, и эфир отогнан. В остатке 1.2 г бесцветного масла, которое нацело закристаллизовалось при пропускании в колбу двуокиси углерода. Продукт промыт эфиром и перекристаллизован из спирта. Полученная таким образом углекислая соль (12) бензиламина представляет собою бесцветные листочки, легко растворимые в воде и горячем спирте, плавящиеся при 91—96°. Такими же свойствами и такой же температурой плавления обладает углекислый бензиламин, приготовленный из бензиламина, полученного действием аммиака на хлористый бензил (13). Смешанная проба плавится 91—96°. Из углекислого бензиламина действием уксусного ангидрида получено ацетильное производное—тонкие, бесцветные иглы из петролейного эфира (14). *П*: 60—61°, смешанная проба *П*: 60—61°. Из углекислого бензиламина получен пикрат бензиламина (15), из водного спирта плоские желтые иглы. *П*: 195—196°, смешанная проба *П*: 195—196°.

Таким образом, суммируя:

Взято фенилбензамидина	25	г
Вернулось фенилбензамидина	17.8 + 0.8 = 18,6	»
Получено бензальдегида	0.9	»
» анилина	1.0	»
» бензиланилина	1.0 + 0.8 = 1.8	»
» бензиламина	1.2	»
» смолистых продуктов	0.5	»
Всего продуктов реакции	24.0	г
Потери	1.0 г, т. е. 4% от всего количества	

Таким образом дигидрофенилбензамидин при восстановлении фенилбензамидина не получается. В руках Бернтсена был фенилбензамидин, который был им принят за дигидрофенилбензамидин.

Дигидрофенилбензамидин до сих пор не получен и должен быть вычеркнут из Бейльштейна.

В заключение следует отметить, что фенилбензамидин может быть получен из бензальанилина и натрийамида с выходом почти вдвое больше,

чем это указано нами в предыдущей работе (1). Если медленно прибавлять бензальанилин к большему избытку натрийамида, то бензальанилин сразу вступает в реакцию, и возможность прохождения побочных реакций значительно уменьшается.

Приводим краткое описание.

К нагретой до кипения смеси 100 см³ толуола и 24 г (0.6 М) тщательно измельченного натрийамида в течение двух часов добавляется небольшими порциями 36 г (0.2 М) бензальанилина. По охлаждении смесь была обработана водой и эфиром. Эфирный слой отделен и 4 раза промыт по 30 см³ 5%-ной уксусной кислотой. Уксуснокислый раствор осажден аммиаком— получено 10.6 г (27%) фенилбензамидина, плавящегося при 113—115°. Пятое и шестое извлечение уксусной кислотой дали 3 г (8%) смеси анилина и фенилбензамидина. Из эфирного слоя, после отгонки эфира и перегонки остатка в вакууме, получено 2.5 г анилина и 13.2 г (36.0%), кипящего при 160—170°/3 мм, бензиланилина. В колбе осталось 3.5 г (10%) высококипящих продуктов.

Лаборатория органической химии
Уральского филиала Академии Наук СССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирсанов А. В. и Иващенко Я. Н., Механизм амидирования натрийамидом. Сообщение I. Новый способ получения замещенных амидинов, Ж. пр. химии (в печати).
2. Bernthsen A. und Szymanski F., B., **13**, 917 (1880).
3. Einhorn und Mauermeyer, A., **343**, 306 (1905).
4. Tawildarow, B., **5**, 477 (1872).—Pulvermacher, B., **25**, 310 (1892).—Reich A., M. **25**, 935, 966 (1904),—Einhorn und Mauermeyer, A., **343**, 306 (1905); **361**, 113 (1908).—Kalle und Co, DRP 164611; C., **1905**, II, 1751.
5. Pratesi, G., **14**, 353 (1884). —Lermontow, B., **7**, 1255 (1874).—Pulvermacher, B., **25**, 2764 (1892); **26**, 955 (1893).—G. Merling, B., **41**, 2064 (1908).
6. Pratezi, G., **14**, 353 (1884).
7. Merling G., B., **41**, 2064 (1908).
8. Колотов, Ж., **17**, 244 (1885).—Ehrenberg, J. pr. [2], **36**, 119 (1887).—Romeny, B., **11**, 835 (1878).—Henry, B., **26**, R. 934 (1893).—Houben und Arnold, B., **41**, 1568 (1908).
9. Колотов, Ж., **17**, 244 (1885).—Braun und Röver, B., **36**, 1196 (1903).
10. Lottermoser, J. pr., [2] **54**, 116 (1896).—Lossen, A., **265**, 138 (1891).
11. Bernthsen, A., **184**, 348 (1876).
12. Bischoff, B., **30**, 3170 (1897).
13. Mason, Soc., **63**, 1313 (1893).
14. Amsel und Hoffmann, B., **19**, 1286 (1886).
15. Jerusalem, Soc., **95**, 1283 (1909).

A. W. KIRSANOV UND I. N. IVAŠČENKO. ÜBER VERMEINTLICHES DIHYDROPHENYLBENZAMIDIN

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund theoretischer Erwägungen und experimenteller Ergebnisse wird nachgewiesen, dass das Dihydrophenilbenzamidin, welches Bernthsen und Szymanski gewonnen haben wollen, tatsächlich von ihnen nicht dargestellt werden konnte. Die Reduktion von Phenilbenzamidin durch Natriumamalgam wird eingehend studiert und es erweist sich, dass dabei Benzaldehyd, Anilin, Benzylanilin und Benzylamin erzielt wird. Dabei wird keine Base gewonnen, die bei 115° schmelzen konnte. Bernthsen und

Szymanski hatten wahrscheinlich ein nicht in Reaktion begriffenes, sondern ein im Prozesse der Ausscheidung durch Salz gereinigtes Phenylbenzamidin vor sich, welches sie für ein Reduktionsprodukt hielten, da es einen um 3° höheren Schmelzpunkt als das Ausgangsprodukt aufwies.

Dihydrophenylbenzamidin ist bis jetzt noch nicht gewonnen und in Beilsteins Handbuch zu streichen.

Durch Veränderung der Reaktionsbedingungen zwischen Benzalanilin und Natriumamid ist es gelungen, die Ausbeute von Phenylbenzamidin und Benzylanilin erheblich zu steigern.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathematiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ДИНАМИКЕ СТАИ[1]

В. В. ШУЛЕЙКИНА

В связи с работами по биологической физике моря, в частности в связи с исследованиями по динамике рыбы[2], на Черноморской гидрофизической станции наметилась серия работ по динамике совместного движения нескольких тел в воде—по динамике стаи.

Так как однако в этой области пока полностью отсутствуют наблюдения, пригодные для количественной обработки, то на первых порах мне хотелось поближе присмотреться к некоторым особенностям движения тех стай, которые часто проносятся перед глазом наблюдателя: стай птиц.

Особенно заинтересовал меня вопрос, какая причина заставляет большинство крупных птиц строиться в характерный «журавлиный клин», или в линию, ориентированную косо по отношению к направлению полета.

Несколько лет тому назад в Институте физики и биофизики Н. П. Кастерин сделал интересный доклад по теории происхождения донного льда; согласно его гипотезе между зачаточными кристалликами льда, плавающими в переохлажденной воде, должны возникать пондеромоторные силы притяжения или отталкивания всякий раз, когда какие-либо внешние препятствия нарушают равномерное движение водных масс; при этом силы взаимодействия могут равняться нулю лишь в одном частном случае, когда кристаллики льда располагаются вдоль некоторой прямой, совершенно определенно ориентированной в речном потоке. После этого доклада на заседании коллоквиума я высказал предположение о том, не та ли самая причина заставляет журавлей выстраиваться в клин? Вскоре это мое предположение подтвердилось благодаря счастливому стечению обстоятельств: однажды осенью над Черноморской гидрофизической станцией пролетала стая журавлей, которая добралась до берега вечером и видимо на ночь не решалась перелетать через море. Птицы смешались в беспорядочную стаю и долгое время так, в беспорядке, летели вдоль береговой черты. При этом необычайно ярко проявились те пондеромоторные силы, о которых только что была речь: птиц резко бросало со стороны в сторону, заставляя то влево, то вправо отклоняться от генерального направления полета и описывать какую-то зигзагообразную линию. Лишь только построившись в правильный клин, журавли снова полетели совершенно спокойно и прямо.

В настоящее время, возвратившись к тому же вопросу, я обнаружил,

[1] Доложено на сессии Академии Наук СССР 21 III 1935 г. на заседании физико-математической группы.

[2] В. В. Шулейкин, Внешняя и внутренняя динамика рыбы, Изв., стр. 1151, 1934.

что силы взаимодействия между летающими журавлями в сущности не нуждаются в каком-либо новом объяснении: к ним может быть применена теория взаимодействия между двумя шарами, движущимися в жидкости, т. е. теория, развитием которой были увлечены многие гидродинамисты прошлого века, искавшие обратные аналогии между явлениями электродинамическими и гидродинамическими. Особенно интересные результаты в этой области получил Карл Бьеркнес (старший).

Согласно его теории[1] два шара с радиусами r_1 и r_2, движущиеся в жидкости плотностью δ со скоростями v_1 и v_2 и находящиеся в данный момент на расстоянии L один от другого, действуют друг на друга с силой f, определяющейся по формуле:

$$f = \pi \cdot \delta \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \frac{r_1^3 \cdot r_2^3}{L^4} [\cos(v_1, v_2) + 3\cos(v_1, L) \cdot \cos(v_2, L)]. \tag{1}$$

Здесь в качестве аргументов тригонометрических функций в круглых скобках стоят углы, образованные скоростями v_1 и v_2 между собою и с отрезком, соединяющим центры обоих шаров.

В частном случае, когда размеры обоих шаров одинаковы и когда они оба движутся с одной скоростью v по одному направлению, формула Бьеркнеса упрощается и принимает вид:

$$f = \pi \cdot \delta \cdot v^2 \cdot \frac{r^6}{L^4} [1 - 3\cos^2 \alpha]. \tag{2}$$

Здесь через α обозначен угол (v, L) между направлением скорости движения и продолжением радиуса вектора, проведенного от «заднего» шара к «переднему» (через центры).

Но ведь из формулы (2) непосредственно вытекает, что при некотором определенном значении α сила f обращается в 0. Именно при

$$\alpha_0 = \arc\cos \sqrt{\frac{1}{3}}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что при критической величине угла

$$\alpha = 54°40'$$

никаких сил взаимодействия между движущимися шарами не будет.

Если угол α больше критического, то правая часть уравнения (2) сохраняет положительный знак. Это значит, что между движущимися шарами действуют силы взаимного притяжения, достигающие (при постоянном расстоянии L) максимальной величины, когда $\alpha = 90°$, т. е. когда оба шара движутся по направлению, перпендикулярному к линии, соединяющей их центры. В данном случае на основании (2)

$$f_{\perp} = \pi \cdot \delta \cdot v^2 \frac{r^6}{L^4}. \tag{4}$$

Напротив, при значениях угла α, меньших критического, в правой части уравнения (2) появляется отрицательный знак, а это показывает, что шары взаимно отталкиваются. Наибольшая отталкивательная сила

$$f_{\parallel} = -2\pi \cdot \delta \cdot v^2 \frac{r^6}{L^4} \tag{5}$$

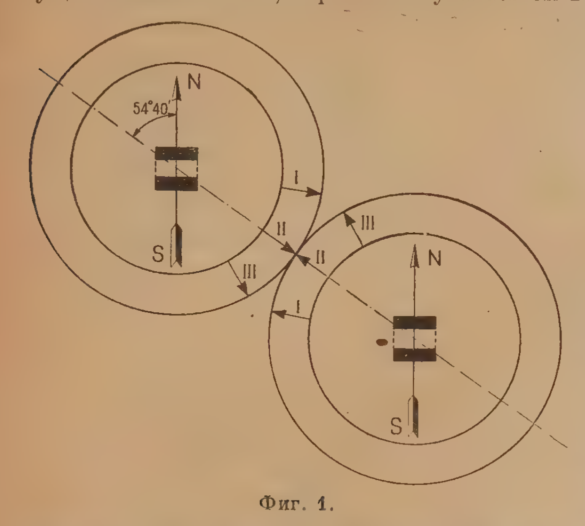
[1] C. A. Bjerknes, Repertorium der reinen und angewandt. Math., Bd. 1, p. 264, 1887. П. Н. Лебедев, Собрание сочинений, стр. 100, Москва, 1913.

возникает в случае $\alpha=0$, т. е. когда «задний» шар движется в точности вслед за «передним».

Итак, для устранения сил взаимодействия—притягательных или отталкивательных—шары должны двигаться таким образом, чтобы линия, соединяющая их центры, составляла угол 54°40′ с направлением движения.

Формула (3), которая здесь получена, как простое и естественное следствие теории Бьеркнеса, решает вопрос о выборе угла. Но решение это чисто формальное. Попытаемся же подвести под него физическое основание, рассмотрев циркуляцию жидкости вокруг движущихся шаров.

В случае единственного шара, отнесенного к системе координат, движущейся вместе с ним, картина получалась бы весьма простая: как известно, вычисления линий тока приводят здесь к такому их семейству, которое в точности совпадает с семейством с и л о в ы х л и н и й м а г н и т н о г о д и п о л я с осью, направленной в сторону движения.



Фиг. 1.

Для двух движущихся шаров тоже можно было бы вычислить линии тока, но вычисления эти потребовали бы громадного труда и времени. Значительно проще и изящнее задача решается путем использования обратной аналогии с двумя магнитными диполями, которыми мы можем мысленно заменить движущиеся шары. Для того чтобы осуществить в действительности такую замену, я воспользовался двумя старотипными телефонными трубками, с длинными подковообразными (точнее—камертонообразными) магнитами.

Эти трубки, схематически изображенные в плане на фиг. 1, были очень удобны для экспериментов, ибо круглые деревянные оправы позволяли как угодно ориентировать «диполи», сохраняя постоянное расстояние между их центрами; очень просто и удобно устанавливался каждый раз и потребный угол между магнитными осями и линией, проходящей через центры диполей: на фигуре видны отметки на краях трубки, совмещая которые можно было давать углу значения 80°, 54°40′ и 30°.

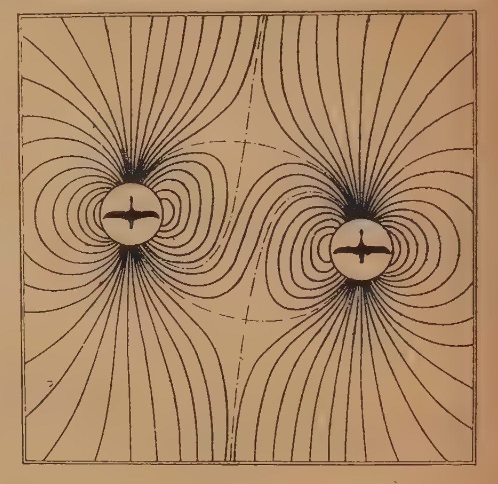
Установив системы под одним из этих углов, я помещал над диполями фотографическую пластинку, посыпал ее железными опилками и, получив магнитный спектр, фиксировал теневое его изображение на пластинке, зажигая под потолком лампочку. Уже при первом взгляде на полученные спектры стало видно, что силовое поле вокруг магнитных диполей, изображавших движущиеся шары, дробится на отдельные области, контуры которых легко могут быть обрисованы. Однако детальное изучение каждой такой области удобнее производить не на самих оригинальных спектрах, а на схемах, более отчетливых и даже более правильных, чем оригиналы.

Эти схемы строились путем тщательной копировки контуров всех упомянутых областей и последующей корректуры их для приведения спектра к идеальному тождеству диполей. Подобного тождества в действительности добиться весьма трудно: один из диполей неминуемо будет несколько сильнее другого. Но асимметрия поля весьма легко элиминируется посредством одной очень простой и надежной графической операции над спектрами, основанной на методе зеркальных изображений.

Корректированные схемы спектров для всех трех случаев представлены на фиг. 2 ($\alpha=80°$), фиг. 3 ($\alpha=54°40'$) и фиг. 4 ($\alpha=30°$).

Как видим, на всех трех рисунках выступают характерные области поля, о которых была речь выше:

a) Область, лежащая в центре картины, очерченная контурами в форме буквы S (на фиг. 2 и 3; на фиг. 4 ту же букву изображают силовые линии, проходящие посреди этой области). Она простирается от одного диполя к другому.



Фиг. 2.

в) Две небольшие области, примыкающие к первой, симметричные относительно нее и тесно связанные с каждым из диполей в отдельности.

с) Две большие области, очерченные дугообразными контурами, связанные каждая со своим диполем и соприкасающиеся между собой краями, асимптотически приближающимися друг к другу.

Можно отметить, что во внешних частях областей «с», наиболее удаленных от соседнего диполя, силовые линии проходят примерно так, как они проходили бы и в случае отсутствия этого соседнего диполя.

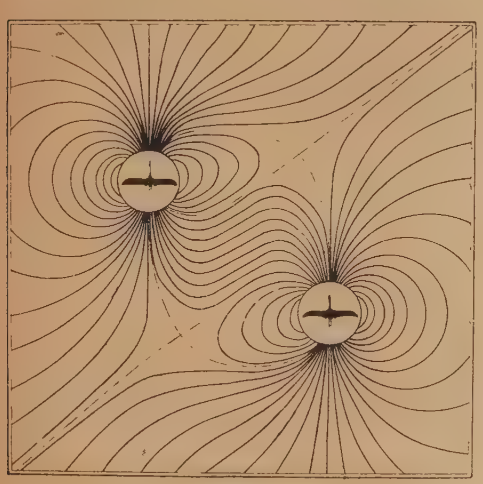
Если бы линии, нанесенные на схемы фиг. 2—4, изображали силовые линии магнитного поля, возникающие вокруг двух диполей, то те из этих силовых линий, которые проходят внутри области «а», должны были бы вызывать взаимное притяжение диполей. Напротив, силовые линии, лежащие в области «с», вызывали бы отталкивание между диполями. Силовые линии, замыкающиеся сами на себя в области «b», не давали бы никакого непосредственного эффекта: они напоминали бы нечто вроде соединительной ткани, проложенной между мышцами живого организма.

Так было бы в случае магнитного поля. Но на фиг. 2—4 совершенно ясно всплывает причина, приводящая к обратной, а не к прямой аналогии между полем магнитным и полем гидродинамическим.

В самом деле, ведь в случае, непосредственно интересующем нас, линии, нанесенные на чертежах, изображают не силовые линии магнитного поля (служившего лишь в качестве прообраза), а линии тока вокруг движущихся шаров (внутри каждого шара для указания направления и ориентировки изображен летящий журавль). Но если это так, то совершенно очевидно, что струи, проходящие в пределах области «а», благодаря своей характерной изогнутой форме будут вызывать отталкивание шаров (в противоположность притяжению магнитных дипо-

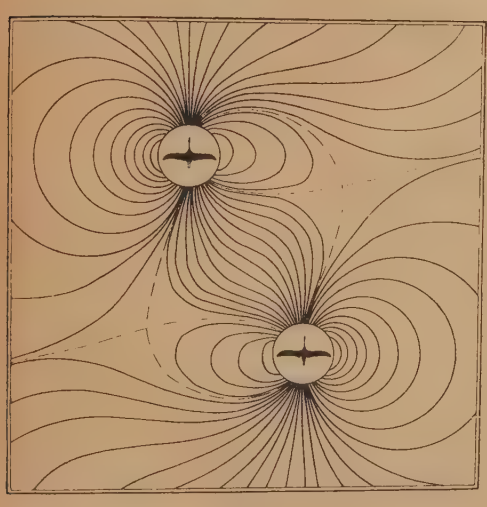
лей); очевидно также, что струи, обтекающие вокруг шаров по дугам в пределах областей «c», будут стремиться с б л и з и т ь оба шара, давя на них соответственным образом.

В связи с этим, любопытно проследить за борьбой сил отталкивания и притяжения при всех трех характерных взаимных расположениях движущихся шаров. Так, на фиг. 2 лишь очень ограниченное число линий тока проходит в области «a»: эта область здесь выражена крайне слабо; малы следовательно и силы отталкивания, действующие между шарами. Напротив, область «c» развита весьма сильно, а потому естественно ожидать здесь наличия больших притягательных сил, вызванных давлением соответствующих дугообразных струй. В результате борьбы естественно побеждают силы притяжения, в полном согласии с формулой (2), которая дает в данном случае значение f, близкое к формуле (4).



Фиг. 3.

Чрезвычайно интересно расположены линии тока на фиг. 3, соответствующей критическому углу 54°40′. Именно, если мы исключим из рассмотрения немногочисленные линии тока, замыкающиеся на самих себя в областях «b», то окажется, что все остальные линии «внутренней» половины поля каждого шара (обращенной к соседнему шару), которые тоже замыкались бы на себя, если бы отсутствовал соседний шар, как бы р а с с е ч е н ы пополам. Одна «прядь», образовавшаяся при этом, откинута к соседнему шару и присоединена к нему в пределах области «a». Эта «прядь» линий тока вызывает отталкивание шаров.



Фиг. 4.

Вторая прядь откинута в сторону и расстилается вдоль линии раздела сфер влияния обоих шаров. Она вызывает силы притяжения. Повидимому действие обеих прядей здесь взаимно вполне уравновешивается, благодаря чему результирующая сила взаимодействия f обращается в нуль.

При угле α, меньшем критического, линии тока располагаются так, как изображено на фиг. 4. На ней область «а» получает сильное развитие: как видим, в нее завлекаются частично даже те линии тока, которые на фиг. 3 проходили в области «с». Вот почему в данном случае естественно ожидать победы сил отталкивания над силами притяжения в полном согласии с формулой (2), которая здесь (при $\alpha = 30°$) приводит к значению f, близкому с формулой (5).

Такова картина гидродинамического поля вокруг движущихся шаров. Примерно такова же она должна быть и вокруг летящих журавлей. Различие заключается лишь в следующем: помимо основного поступательного движения птицы совершают еще движения в вертикальном направлении,—взмахивая крыльями и поднимая и опуская центр тяжести над генеральной траекторией; само поступательное движение у них не является вполне равномерным, а характеризуется некоторыми колебаниями скорости в зависимости от фазы движения крыльев. К сожалению детали всех этих движений еще чрезвычайно мало изучены с количественной стороны. В настоящее время можно сказать только, что для компенсации добавочных сил, возникающих между птицами вследствие подобных осложнений в их движении, центры тяжести их должны будут несколько сместиться с того расположения, которое гарантировало спокойный полет в исследованном простом случае поступательного движения шаров, причем смещение произойдет повидимому не только в горизонтальной плоскости, но и в вертикальной: «задний» журавль должен будет лететь немного выше «переднего».

Наличие горизонтальных и вертикальных ускорений при полете птиц заставляет упомянуть еще об одном обстоятельстве, которое не интересовало бы нас в случае равномерного поступательного движения. Именно, приходится принимать во внимание, что при тех же самых взаимных расположениях тел, которые были хотя бы изображены на фиг. 2—4, пондеромоторные силы меняют знак, когда скорости тел оказываются направленными в противоположные стороны: т. е. при расположении фиг. 2 тела не притягиваются, а отталкиваются; при расположении фиг. 4— не отталкиваются, а притягиваются. Только при расположении фиг. 3 между телами снова будут отсутствовать всякие взаимодействия, как это было и в случае согласно направленных скоростей.

Но если это так, то легко видеть, что при несинхронном движении крыльев двух соседних птиц, при наличии сдвига фаз между их движениями, в течение одной части периода птицы должны будут взаимно притягиваться, а в течение другой—взаимно отталкиваться, если только они расположены не на критической прямой. Лишь встав на эту прямую, птицы избавятся от пондеромоторных сил, бросающих их со стороны в сторону (как это и наблюдалось на Черноморской гидрофизической станции при беспорядочном полете журавлей). Можно показать, что подобное же «дергающее» действие должны оказывать на птиц и те силы, которые обусловлены не вертикальными взмахами крыльев, а колебаниями скорости поступательного движения в течение периода: ведь если бы таких колебаний не было, то птицы могли бы приноровиться к существованию некоторой постоянной по величине и направлению пондеромоторной силы, действуя «рулями направления». При колебаниях же скорости полета сила f будет колебаться чрезвычайно резко, что снова поведет к возникновению вредных боковых смещений.

Легко видеть, что все приведенные рассуждения относятся лишь к стаям крупных птиц, ибо при уменьшении размеров птицы сила f умень-

шалась бы пропорционально шестой степени этих размеров, если бы притом не изменялось расстояние между соседними птицами. Так как последнее расстояние все же уменьшается, хотя и значительно медленнее, чем размеры, то можно полагать, что в результате сила взаимодействия f уменьшается пропорционально четвертой степени размеров птицы. Вот почему мелкие птицы могут свободно лететь беспорядочными стаями, заметно не мешая одна другой.

В заключение остается сказать, что найденные взаимодействия должны наблюдаться у крупных рыб, идущих косяком. Ближайшая задача Черноморской гидрофизической станции заключается в исследовании этих взаимодействий, возникающих в водной среде, а также в исследовании лобового сопротивления, испытываемого отдельными рыбами при наличии и в отсутствии соседних членов косяка.

Черноморская гидрофизическая станция. Кацивели.

Поступило 11 V 1935.

W. W. SHOULEJKIN. ON THE DYNAMICS OF A FLOCK[1]

SUMMARY

In connection with the works on biophysics of the sea in general and the dynamics of the fish[2] in particular, a series of works on the dynamics of the joint movement of several solids in the water—the dynamics of a flock—has been scheduled by the Black Sea Hydrophysical Station.

Having considered, however, the lack of necessary observation (at all account the lack of observations fit for quantitative adaptation) I decided to begin with a closer examination of some peculiarities in the motion of the flocks which catch the observers eye very often—the flocks of birds. I was particularly interested by the problem: what causes all the big birds to form their flocks into a characteristic «crane angle» or a line obliquely orientated to the flight direction.

Some years ago N. P. Kasterin made at the Institute of Physics and Biophysics an interesting report on the theory of bottom ice origin: according to his hypothesis, ponderomotor forces of attraction and repulsion must arise between the embryo ice crystals floating in cooled water, every time when some external obstacles disturb the regular motion of water masses; although the interacting forces may be equal to zero in one particular case: when the ice crystals are disposed along a certain straight line orientated in the river flow in a perfectly specific way. After this report I suggested that the same cause made the cranes to form their flock in an angle. Very soon afterwards my supposition was confirmed by a lucky coincidence of events. One autumn day a flock of cranes has been flying over the Black Sea Hydrophysical Station; as the birds had reached the coast in the evening and apparently did not dare to begin their flight across the sea at night, they mixed up into a disorderly flock and were flying along the coast a long time in such a way. Then the above mentioned ponderomotor forces appeared extremely clearly: the birds were being brusquely jerked from side to

[1] Reported at the Session of the Academy of Sciences of USSR at the sitting of the phys.-math. department on March 21 1935.

[2] W. W. Shouleikin, External and internal dynamics of the fish. Bul. of the Acad. of Sciences USSR, p. 1151, 1934.

side, and they were compelled, to deviate from the general direction to the right and left and to describe a zigzagged line. Only on the forming of an angle the cranes flew perfectly directly and steadily again.

Having returned to this problem at the present time, I discovered, that practically speaking the interacting forces between the flying cranes need no new explanation: the theory of the interaction of two spheres moving in some liquid may be conveniently applied in this case too. It is the theory, the developing of which had interested many hydrodynamists, who had looked for an inverse analogy between the electrodynamic and hydrodynamic phenomena. Particularly curious results in this branch had been obtained by Karl Bjerknes (senior). According to his theory[1] two spheres with radii r_1 and r_2 moving in the liquid with the density δ with velocities v_1 and v_2 and situated at the present moment at a distance L from one another, interact with the force f determined according to the formula

$$f = \pi.\,\delta.\,v_1\cdot v_2 \frac{r_1^3\,r_2^3}{L^4}\ [\cos(v_1,v_2) + 3\cos(v_1,L)\cos(v_2,L)]. \qquad (1)$$

Here the arguments of trigonometrical functions (in round brackets) are the angles formed by the velocities v_1 and v_2 and the line connecting the centers of both spheres.

In the peculiar case, when the dimensions of the spheres are equal, the same as the velocities if their motion along the same direction, Bjerknes, formula may be simplified

$$f = \pi.\,\delta.\,v^2 \frac{r^6}{L^4}[1-3\cos^2\alpha]. \qquad (2)$$

Here α denotes the angle (v,L) between the direction of the motion velocity and the vector-radius drawn from the «back» sphere to the «front» one through their centers. But from the formula (2) it immediately follows, that at certain values of α the force f is equal to zero. Namely

$$\alpha_0 = \arccos\sqrt{\frac{1}{3}}. \qquad (3)$$

It follows from this, that at the critical value of the angle

$$\alpha = 54°40'$$

there will be no interaction between the moving spheres.

If the angle α is larger, than the critical one, the right part of the equation (2) keeps a positive sign. It means that between the spheres there arise the forces of a t t r a c t i o n reaching (at the constant distance L) their maximum value when $\alpha = 90°$, i. e. when both spheres move in a direction normal to the line connecting their centers. In this case according to (2)

$$f_{\perp} = \pi.\,\delta.\,v^2 \frac{r^6}{L^4}. \qquad (4)$$

On the contrary, when the values of the angle α are less, than the critical one, the right part of the equation gets a negative sign. It shows, that the spheres are i n t e r -r e p u l s i n g. The strongest repulsing force

$$f_{\parallel} = -2\pi.\,\delta.\,v^2 \frac{r^6}{L^4} \qquad (5)$$

[1] C. A. B j e r k n e s Repertorium der reinen und angewand. Math , Bd., I, p. 264, 1887.

arises in the case, when $\alpha=0$, i. e., when the «back» sphere exactly follows the «front» one.

Thus to avoid the forces of interaction (both attractive and repulsing) the spheres must move in such a way, that the line, which connects their centers, would make an angle of 54°40′ with the motion direction.

The formula (3), which is here got as an immediate and natural result of the Bjerknes'theory solves the problem of the choice of the angle. But this solution is purely formal. Let us try to find a physical basis for it, by means of the examination of the liquid circulation around the moving spheres.

In the case of a single sphere referred to a coordinate system moving along with it, the result would have been very simple. As it is known, the calculation of the current lines lead here to a combination perfectly coinciding with that of the power lines of the magnetic field with an axle going in the direction of the motion.

The current lines for two moving spheres might have also been calculated, but the operation would require a great deal of time and labour. The problem can be solved much more elegantly and simply by means of an inverse analogy to two magnetic dipoles with which we can mentally substitute the spheres. To realize a similar substitution I have used two old-fashioned telephone receivers with long horse-shoe (to be more precise—tuning-fork) shaped magnets. They are schematically represented in the plan of fig. 1. The receivers have been very convenient for the experiments, for their round wooden frames permitted to orientate the «dipoles» in the desired direction without changing the distance between their centers. The needed angle between the magnetic axles and the line, passing through the centers of the dipoles, was also very easily determined: on the figure on the edges of the receiver you can see the marks, the coincidence of which gave the angle the values of 80°, 54°40′ and 30°.

Having set the systems at one of these angles, I put a photographic plate above the dipoles, strew it with iron sawdust, and after having got the magnetic spectrum, fixed its shadow by means of a lamp lighted at the ceiling. At the first glance at the spectra received, it became clear, that the power field around the magnetic dipoles representing the moving spheres is divided into several zones, which it is very easy to outline. A detailed examination of each zone however is easier to make on schemes which are more regular and distinct, than the original spectra. These schemes have been obtained by means of careful copying of the outlines of all the above mentioned zones. The copying has been followed by the correction of the schemes in order to obtain an ideal identity of both dipoles. In practice it is very difficult to obtain such an identity: one of the dipoles is inevitably more powerful, than the other. But this asymmetry can be very easily eliminated by means of a very simple and reliable graphic operation, based on the method of mirror reflections.

Corrected spectra schemes for all three cases are represented on fig. 2 ($\alpha=80°$), fig. 3 ($\alpha=54°40'$) and fig. 4 ($\alpha=30°$). On all the figures we can see the above mentioned peculiar zones of the field:

a) The zone in the middle of the picture outlined in the shape of the letter S (on the fig. 2 and 3; on fig. 4 the same letter is represented by the power lines passing through the middle of this zone). It extends from one dipole to the other.

b) Two small zones, adjoining the first one, situated symmetrically as regards the latter and closely connected each with its separate dipole.

c) Two big zones, having arched outlines, each connected with its own

dipole and touching one another with their edges, which asymptotically approach one another.

It may be noted, that in the external sections of the zones «c», which are the remotest from the neighbouring dipole, the power lines have the direction, which they would assume, if there were no other dipole at all.

If the lines outlined on the schemes of fig. 2 and 4 would represent the power lines of the magnetic field, arising around two dipoles, then the lines which pass inside the zone «a» would have caused the attraction of the dipoles. On the contrary, the lines, lying in the zone «c», would have evoked a repulsion of the dipoles. The self-locking power lines in the zone «b» would have produced no immediate effect: they would remind us of something like a connective tissue between the muscles of a living organism.

Such would have been the result in the case of a magnetic field. But already on the fig.2 and 4 we can clearly see the reason leading to an inverse analogy between the magnetic and hydrodynamical fields.

Indeed in our particular case the lines drawn on the schemes represent not the power lines of the magnetic field, which had served only as a prototype, but the current lines around the moving spheres (to point the direction and the orientation a flying crane is represented inside each sphere). But it is perfectly obvious, that in this case the streams of the zone «a», thanks to their curved shape, will cause the repulsion of the spheres (contrary to the attraction of the magnetic dipoles); it is also evident, that the streams, flowing around the spheres in the shape of arcs within the limits of the zones «c», will tend to draw the spheres together, pressing upon them in a corresponding way.

In this connection it is interesting to follow the struggle of the attracting and repulsing forces under the three characteristic positions of the spheres. For instance the fig. 2 has a very limited number of current lines in the zone «a»: consequently the repulsing forces between the spheres are small too. On the contrary the zone «c» is extremely pronounced; therefore it is only natural to meet here with big attracting forces caused by the pressure of the corresponding arched streams. The result of the struggle is naturally the victory of the attracting forces in complete accordance to the formula (2), giving in this case the value of f approaching the formula (4).

The power lines on fig. 3, corresponding to the critical angle 54°40′, are disposed in an extremely curious way. Indeed if we exclude the scarce self-locking lines of the zone «b», it will prove, that all the other lines of the «internal» half of each sphere field (turned to the other sphere), which would also be self-locked, if there were no other sphere, appear to be cut in halves. One «strand» is thrown off towards the neighbouring sphere and is connected to the latter within the limits of the zone «a». This strand of lines causes the repulsion of the spheres. The second strand is thrown aside and stretched along the line dividing the fields of each spere's activity. It causes the attraction. It appears, that the effect of both strands is perfectly interbalanced, and thanks to that the resulting interaction power f becomes equal to zero.

When the angle is smaller, than the critical one the lines are disposed, as it is represented on fig. 4. Here the zone «a» is highly developed: we can see, that it even draws in itself the lines, which on fig. 2 had belonged to the zone «c». That is why in this case it is natural to meet with the victory of the repulsing forces over the attractive ones in full accordance to the formula(2), which here (at $\alpha=30°$) gives the value of f, approaching the formula (5).

Such is the picture of the hydrodynamical field around the moving spheres. It must be nearly the same around the flying cranes. The only difference

is the following: except the main progressive motion the birds perform movements in the vertical direction by flapping wings and by lifting and lowering their centers of gravity above the general trajectory; the progressive motion itself is not perfectly regular and has velocity variations depending upon the phase of the wing movements. Unfortunately the details of all these movements are studied very little from the quantitative point of view. At the present time it may be only stated, that to compensate the extra forces, arising between the birds on the grounds of these complications in their motion, their centers of gravity will have to be displaced from the position, which would have secured an undisturbed flight in the investigated simple case of the progressive motion of spheres. It appears, that the displacement will take place both in the horizontal and vertical planes: the «back» crane will fly a little higher, than the front one.

The presence of horizontal and vertical accelerations in the flight of birds obliges us to mention one circumstance, which would have had no importance in the case of regular progressive motion. Namely, we have to take into consideration the fact, that at the same reciprocal positions of solids represented e. g. on fig. 2—4 the ponderomotor forces change the sign, when the velocities prove to have opposite directions: i. e. when we have the position of fig. 2 we get repulsion and not attraction, and at the position of fig. 4—we get attraction instead of repulsion. Only at the position of fig. 3 there will be again no interaction between the solids, the same as it would have been in the case of harmonious velocities.

But if this is true, it is easy to see, that the asynchronous wing mouvement of the two neighbouring birds thanks to the phase displacement of their motion, will attract the birds to one another during one part of the period, and it will repulse them during the other, if only they are not disposed along the critical straight line. Only after having assumed the position on this line the birds will get rid of the ponderomotor forces throwing them from side to side (as I had succeeded in observing at the Black Sea Hydrophisical Station during the disorderly flight of cranes). It is possible to show, that the same «jerking» influence must be exercised on the birds also by the forces caused not by the vertical strokes of wings, but by the variations of the progressive motion velocity during one period. Indeed, if there were no such variations, the birds might adapt themselves to the existence of a ponderomotor force of constant velocity and direction by means of their «steerage». But if the flight velocity varies, the variations of the force f will be very pronounced and this will cause the obnoxious lateral displacement again.

It is easy to see, that all these considerations may be applied only to the flocks of big birds, for along with the decrease of the bird's dimensions, the force f would have diminished in proportion to the sixth power of the dimension, if the distance between the birds would not diminish also. As the latter does decrease, though considerably slower, than the size, it may be supposed, that the force of interaction f diminishes in proportion to the fourth power of the bird's size. That is the reason why the small birds can freely fly in disorderly flocks without impeding one another.

In conclusion one has to state, that the interaction discovered must exist also by the big fishes swimming in shoals. The next task of the Black Sea Hydrophysical Station is the investigation of the same interaction arising in water medium as well as of the frontal resistance endured by a single fish both in the presence and absence of the other members of the shoal.

Black Sea Hydrophysical Station.

Received
11 V 1935.

Сдано в набор 2 декабря 1935 г. — Подписано к печати 21 января 1936 г.
Формат бум. 72×110 см—10 печ. л.+1 табл. вкл.—51840 тип. зн. в печ. л.—Тираж 3 100.
Москва. Уполномоченный Главлита В 34979. АНИ № 120. Заказ № 1297.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Трехпрудный, 9.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.

Le titre marqué d'un astérique est une traduction du titre original.

Цена 7 руб.